CPGE TSI 2$^{\text{ème}}$ année

Travaux pratiques d'informatique

Claude Guéganno
http://claude.gueganno.free.fr

11 septembre 2002

Étude de fonctions, tracé de courbes . . .

1

Équation dans $\mathbb{R}$

1. Étudier les variations (signe de la dérivée et limites aux bornes du domaine de définition) de la fonction :

$$x \mapsto e^x(x^2 - 2x + 4)$$

2. En déduire que l'équation

$$e^x(x^2 - 2x + 4) = 5$$

admet une solution unique dans $\mathbb{R}$. Donner une valeur approchée de cette solution.

Indications : `diff`, `limit`, `solve`, `plot`, `fsolve`.

2

Courbe paramétrée. Tracer la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x = X(t) = \cos 3t \\ y = Y(t) = \sin 2t \end{cases}$$

3

1. Tracer les courbes d'équations $ax^2+by^2 = 1$ (ellipses) pour x et y compris entre -1 et 1, en donnant à a les valeurs 1,2 et 3 et à b les valeurs 1 et 2.
2. Même question (hyperboles) avec $a = -2$ et des valeurs de b égales à 1 et 2. On prendra $x \in [-5,5]$ et $y \in [-10,10]$.
3. Tracer les courbes d'équations $ax + by^2 = 1$ (paraboles) pour x et y compris entre -2 et 3, en donnant à a les valeurs -2 et -1 et à b les valeurs 1 et 2.

Indications : `implicitplot`, `seq`

4

Calcul d'intégrales. Calculer les intégrales suivantes

1. $I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} dx$
2. $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+2\cos^2 x} dx$
3. $I_3 = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+x^4} dx$
4. $I_4 = \int_1^{\infty} \frac{1}{x+4} dx$

Indications : `Int`, `int`, `infinity` ,

5

Calcul de primitives. Rechercher les primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ (a et b quelconques)
2. $f_2 : x \mapsto \ln(x + \frac{1}{x})$

6

Calcul d'aires On considère les quatre fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies par

$$f_1(x) = x^3 + x,\ f_2(x) = \frac{x^2}{8},\ f_3(x) = \frac{1}{x},\ f_4(x) = \frac{5}{x}$$

1. Représenter graphiquement sur un même dessin ces quatre fonctions. Définir les limites d'affichage convenablement pour mettre en évidence la zone du premier quadrant ($x \geq 0, y \geq 0$)où se rencontrent les 4 courbes.
2. On s'intéresse à l'aire enfermée par les 4 courbes. Donner une valeur exacte puis une valeur approchée de l'aire de cette portion de plan.

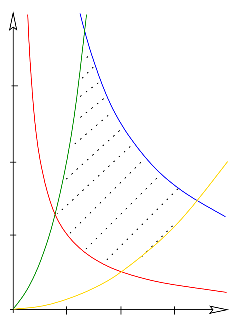

Fig. 1 – *Calcul d'aire.*

7

Étude d'une fonction définie par une intégrale. On pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t^4+t+1} dt$

1. Étudier les variations de la fonction

$$g : t \mapsto t^4 + t + 1$$

   En déduire le domaine de définition de f.
2. Étudier les variations de f et calculer une valeur approchée de ses extrema.
3. Chercher les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
4. Représenter graphiquement f sur $]-2,2[$. (Faire représenter la partie réelle d'une approximation de f: ne pas oublier que pour Maple, tout est complexe).

Indications : `seq`, `display`

8

Dessin en trois dimensions

1. Définir la fonction f telle que

$$\begin{cases} f(x,y) = e^{-x^2-2y^2} & \text{pour } -1 < x < 1 \text{ et } -1 < y < 1 \\ f(x,y) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Tracer la surface $z = f(x,y)$ pour x et y entre -2 et 2. En sélectionnant le dessin, faire varier les angles de vision et la forme de la représentation.
3. Tracer les courbes de niveau $k = 0.3$, 0.6 et 0.9 correspondant à cette fonction.

Expressions et structures de commande

9

Expressions logiques Le but de cet exercice est de spécifier un ensemble de variables booléennes visant à résoudre progressivement un problème logique.

On teste le comportement d'Albert, un rat de laboratoire en le plaçant dans un labyrinthe où se trouve un morceau de fromage. Ce labyrinthe possède trois portes coulissantes et un mur escamotable (figure 2) :

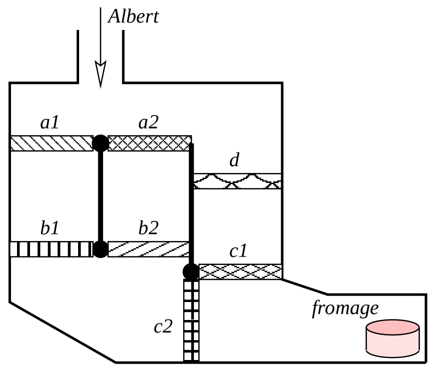

FIG. 2 – *Plan du labyrinthe*

→ le mur d est escamotable;

→ la porte a peut occuper les emplacements $a1$ ou $a2$;

→ la porte b peut occuper les emplacements $b1$ ou $b2$;

La configuration du labyrinthe est choisie au début d'une expérience et n'est pas modifiée durant le parcours d'Albert. Cette configuration est définie de la manière suivante à partir d'un nombre entier n ($n \in [1,99]$) choisi par l'utilisateur.

→ Si n est multiple de 5, alors la porte a est en $a1$ sinon, la porte a est en $a2$.

→ Si les deux chiffres de n ont même parité, alors la porte b est en $b1$, sinon la porte b est en $b2$.

→ Si n est strictement inférieur à 50, alors la porte c est en $c1$, sinon, la porte c est en $c2$.

→ Si la somme des deux chiffres de n est strictement inférieure à 9, alors le mur d est présent, sinon le mur d est escamoté.

1. Définir la variable u qui représente le chiffre des unités d'une variable n préalablement initialisée.
2. Définir la variable di qui représente le nombre des dizaines unités d'une variable n préalablement initialisée.
3. Définir les variable booléennes $a1$, $a2$, $b1$, $b2$, $c1$, $c2$, d en fonction de n[1].
4. Définir la variable booléenne $mange$ en fonction de $a1$, $a2$, $b1$, $b2$, $c1$, $c2$ et d qui est vraie lorsque le chemin construit conduit Albert au fromage, et fausse sinon.
5. À partir des questions précédentes, écrire un programme qui reçoit un entier n et qui renvoie la variable booléenne $mange$.

Indications : `not`, `and`, `or`, `mod`, `floor`.

10

Table de multiplication Écrire un programme qui affiche une table de multiplication sous la forme d'un carré. On se

1. n sera consdéré comme appartenant à l'intervalle [1,99].

limitera à 9 et l'affichage produit par l'exécution du programme sera conforme à :

```
> tableMult
  1|  2|  3|  4|  5|  6|  7|  8|  9|
  2|  4|  6|  8| 10| 12| 14| 16| 18|
  3|  6|  9| 12| 15| 18| 21| 24| 27|
  4|  8| 12| 16| 20| 24| 28| 32| 36|
  5| 10| 15| 20| 25| 30| 35| 40| 45|
  6| 12| 18| 24| 30| 36| 42| 48| 54|
  7| 14| 21| 28| 35| 42| 49| 56| 63|
  8| 16| 24| 32| 40| 48| 56| 64| 72|
  9| 18| 27| 36| 45| 54| 63| 72| 81|
>
```

Indications : Pour afficher un entier i sur 3 caractères, on pourra utiliser la fonction `printf("%3d", i)`

11

Calcul du PGCD par l'algorithme de Joseph Stein . Cet algorithme permet de calculer le PGCD de deux nombres sans faire de division euclidienne, mais seulement avec des soustractions, des comparaisons et des divisions par 2 ($\Leftrightarrow$ décalages à droite). Il utilise les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \text{si } a = b \text{ le PGCD est } a \text{ (ou } b\text{)} \\ \text{si } a \text{ et } b \text{ sont pairs, leur PGCD est} \\ \quad \text{le double de celui de} \frac{a}{2} \text{ et } \frac{b}{2} \\ \text{sinon, } a \text{ et } b \text{ ont même PGCD que } \min(a,b) \text{ et } \mid a-b \mid \end{cases}$$

1. Donner l'algorithme de Stein
2. Coder cet algorithme avec le langage **`maple`**

Indications : `min`, `abs`

12

Nombres amis . On dit que deux nombres a et b sont amis si :

$$\begin{cases} \text{La somme des diviseurs stricts de } a \text{ est égale à } b \\ \text{La somme des diviseurs stricts de } b \text{ est égale à } a \end{cases}$$

Les <u>diviseurs stricts</u> de a sont les diviseurs de a (1 y compris) sauf a lui même.

1. Écrire une fonction **`somDiv`** qui reçoit un entier **`N`** et qui renvoie la somme des diviseurs de **`N`**. Tester.
2. Écrire une fonction **`sontAmis`** qui renvoie **`true`** quand deux nombres sont amis et **`false`** sinon.
3. Écrire une fonction **`listeAmis`** qui affiche les couples d'entiers amis compris entre deux bornes **`Min`** et **`Max`**

13

Polygones Écrire la fonction `trace_polygone(n)` qui représente graphiquement un polygone régulier comportant **`n`** sommets.

14

Le crible d'Ératosthène . On recherche la liste des nombres premiers inférieurs à un entier donné N. Pour cela, on applique les règles suivantes :

– Écrire tous les nombres par ordre croissant entre 2 et N.

- Rayer tous les multiples de 2.
- Rayer tous les multiples de 3.
- d'une manière générale, étant donné le dernier nombre p ayant servi à rayer les multiples, le prochain nombre premier à utiliser pour rayer des multiples se trouve après l'ensemble des nombres rayés consécutifs situés après p.
- Le processus s'arrête lorsque le dernier nombre premier est supérieur à $\sqrt{N}$

Écrire une procédure `Eratos := proc(N)` qui renvoie une liste des nombre premiers $\leq N$.

15

Le but de cet exercice est de mettre en œuvre la formule de Taylor et Mac Laurin.

Formule de Taylor **et** Mac Laurin : *On considère K corps commutatif unitaire de caractéristique nulle. Soit P, polynôme de $K[X]$ et a un élément de K; on a l'égalité suivante :*

$$P(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(n)}(a)(X-a)^n}{n!}$$

Écrire une procédure `laurin` qui reçoit en entrée un polynôme quelconque et qui renvoiele polynôme correspondant sous la forme de Taylor et Mac Laurin.

16

La suite de Thue–Morse On considère la suite

$$S = (S_n)_{n\geq 0}$$

définie par

$$S_n = (-1)^{b(n)} \text{ avec } b(n) = \sum_0^{\infty} b_i(n)$$

Les $b_i(n)$ sont définis par l'écriture binaire de n:

$$n = \sum_0^{\infty} b_i(n) \times 2^i \qquad b_i(n) \in \{0,1\}$$

1. Écrire une procédure `binaire` qui reçoit en argument un entier N et qui renvoie une séquence composée des *bits* utilisés dans l'écriture binaire de N.

   `binaire := proc(N)`

2. Écrire la procédure qui calcule $b(n)$.

   `somdigit := proc(N)`

3. Donner une instruction qui affiche les 100 premières valeurs de la suite S_n.

Facteur de S_n Une suite $(t_0,t_1,\cdots,t_{k-1})$ est appelée un **facteur** de longueur k de S s'il existe n tel que

$$S_{n+i} = t_i \text{ pour } i = 0,\cdots,k-1 \qquad (1)$$

On considère des facteurs de longueur 3.

4. Écrire un programme qui recherche la première apparition d'un facteur donné en argument, dans la suite S_n. Le paramètre T sera du type «liste».

```
cherche3 := proc(T)
  ...
  RETURN (n);
end;
```

Exemple d'appel : `cherche3([-1, 1, -1]);`

17

Polynômes de TCHÉBYCHEFF Il existe deux définitions des polynômes de TCHÉBYCHEFF; d'une part,

$$T_n(x) = \cos\left(n \times \arccos(x)\right) \tag{1}$$

qui donne directement le polynôme de rang n, ou bien la relation récurrente:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) && (2)\\ T_0(x) &= 1 && (3)\\ T_1(x) &= x && (4) \end{aligned}$$

1. Ecrire une fonction $Tch1$ qui reçoit en argument un entier n et qui renvoie la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & T_n(x) \end{array} \right.$$

Cette fonction utilisera la relation 1.

2. Écrire la fonction $Tch2$ qui réalise les mêmes conditions, mais en utilisant les relations 2, 3 et 4.
3. On considère le produit scalaire:

$$< f,g >= \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Écrire une fonction $Prstch$ qui reçoit f et g et qui retourne le produit scalaire $< f,g >$.

4. Soit la fonction f_λ définie pour $|x| \leq 1$

$$f : \quad x \mapsto \frac{1 - \lambda x}{1 - 2\lambda x + \lambda^2}$$

Écrire un programme recevant en entrée un entier n et qui renvoie un tableau Tab de $(n+1)$ valeurs indexées de 0 à n de sorte que:

$$Tab[i]_{i \in [0 \ldots n]} =< f_{\frac{1}{2}},T_i >$$

5. Écrire un programme recevant en entrée un entier n et traçant sur un même graphique la famille de polynômes de TCHÉBYCHEFF $(T_i)_{i \in [0 \ldots n]}$.

Exercices types

18

Déterminer les nombres complexes z tels que

$$\frac{z^2}{2z + 3i}$$

soit imaginaire pur.

Les représenter dans le plan complexe.

19

Calculer les zéros du polynôme P donné par :

$$P = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$$

Décomposer P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

20

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

où a et b sont des paramètres complexes.

1. À quelle condition A est-elle diagonalisable?
2. En supposant cette condition réalisée, on appelle $\mathcal{B}$ une base de vecteurs propres et P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. Vérifier que $P^{-1}.A.P$ est bien diagonale.

21

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le paramètre complexe a pour que toutes les valeurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$$

soient strictement positives.

22

On considère $A = (a_{ij})$, carrée d'ordre 5 telle que :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 - (\frac{1}{2})^{5-j} & \text{si } i = j \text{ et } i < 5 \\ 1 & \text{si } i = j = 5 \\ (\frac{1}{2})^{5-j} & \text{si } i = j + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et l'endomorphisme f représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$.

Soit v le vecteur de coordonnées $(1,0,0,0,0)$, n un entier et p_n la dernière coordonnée de l'image de v par f^n.

1. Déterminer la suite des couples (n,p_n) pour n variant de 0 à 150.
2. Tracer le graphe de p_n en fonction de n.
3. Déterminer la plus petite valeur de n pour que p_n soit supérieur à 0,99.

23

Dans un repère orthonormé, on considère les 4 points:

$$A(1,2,3) \quad B(2,4,-5) \quad C(0,1,-6) \quad D(-1,0,7)$$

Trouver le centre et le rayon de la sphère passant par ces 4 points.

24

Dans un repère orthonormé, on considère les 4 points:

$$A(-1,0,2) \quad B(3,-2,1) \quad C(2,-1,1) \quad D(0,4,-3)$$

Déterminer la distance du point D au plan (ABC).

25

Déterminer les coefficients a,b,c,d et e pour que la fonction f définie par :

$$f(x) = \cos x - \frac{a + bx^2 + cx^4}{1 + dx^2 + ex^4}$$

soit un infiniment petit d'ordre le plus élevé possible au voisinage de 0.

Donner un équivalent de f.

26

Pour quelles valeurs de a, b et c, les primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx + c}{(x-1)^3(x+2)^5}$$

sont-elles des fractions rationnelles ? Déterminer une de ces primitives.

27

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$xy'(x) + (1-x)y(x) = \frac{xe^x}{x^2+1}$$

Tracer quelques courbes intégrales.
Existe-t-il des solutions continues sur $\mathbb{R}$? Justifier la réponse.

28

La valeur pour $x = 1$ de la solution de l'équation différentielle

$$y''(x) + (y'(x))^2 = 1$$

avec les conditions initiales :

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = a$$

est une fonction du paramètre réel a. Tracer le graphe de f pour a variant de -1 à 10.

29

Résoudre numériquement l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) + x\sin(y(x)) = 0$$

Conditions initiales : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0.5$

Soit f sa solution. Tracer son graphe.

Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la plus petite valeur strictement positive annulant f.

30

Tracer la courbe paramétrée définie par :

$$x = \frac{2t-1}{t^2-1}\ ,\ y = \frac{t^2+3}{t-1}$$

Étudier les branches infinies. Calculer les coordonnées du point double.

31

Écrire une fonction f qui associe à l'entier n les cubes des chiffres utilisés dans l'écriture de n en base 10.

Écrire un algorithme permettant de déterminer tous les entiers $n \leq 1000$ tels que $f(n) = n$.

32

Écrire une fonction qui associe à toute suite finie de nombres réels

$$(u_1, u_2, \cdots, u_N)$$

l'indice de la plus grande valeur. Si plusieurs valeurs de la suite sont égales à cette valeur maximale, le résultat est l'indice le plus petit.

33

Dans $\mathbb{C}$ résoudre l'équation suivante : $z^2 + \bar{z} + iz = 0$.

Montrer que les points dont les affixes sont solutions forment un triangle rectangle.

34

On considère le polynôme réel suivant :

$$P = X^4 + X^3 + aX^2 + \sqrt{2}X + b$$

1. Déterminer a et b pour que $1 + i$ soit zéro de P; calculer alors tous les zéros de P.
2. Factoriser P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

35

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les matrices B telles que $AB = BA$. (La solution générale dépend de trois paramètres).

36

Résoudre, en discutant suivant le paramètre réel m, le système linéaire suivant :

$$A = \left\{ \begin{array}{rcl} mx + y + mt & = & 1 \\ x + m^2y + z + mt & = & m \\ x + my + t & = & 1 \\ my + z + m^2t & = & m^2 \end{array} \right.$$

37

Soit $E = \mathbb{R}_6[X]$. On pose pour P et Q, éléments de E :

$$(P \mid Q) = \int_0^{\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

On notera $\| \ \|$ la norme associée.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire. Construire une base orthonormale du sous-espace $\mathbb{R}_5[X]$.
2. Pour $H = X^6 + X + 1$ déterminer P, élément de $\mathbb{R}_5[X]$, tel que $\|H - P\|$ soit minimale.

38

On donne la droite (D) d'équation :

$$\begin{cases} x + 2y - 5z - 1 = 0 \\ 10x - 7y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

dans un repère orthonormé, et le point $A(1{,}2{,}3)$.

1. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur la droite (D).
2. Calculer la distance du point A à la droite (D).

39

Soit la courbe de représentation paramétrique :

$$x = \frac{u^3}{u^2 - 9}\ ,\ y = \frac{u(u-2)}{u-3}$$

Représenter cette courbe; préciser les asymptotes, les points doubles et les points d'inflexions.

40

Soit dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la conique Γ d'équation :

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 1$$

Déterminer une équation réduite de Γ et en déduire ses principales caractéristiques. La représenter.

41

Dans un repère orthonormé, on considère les quatre points:

$$A(0{,}0{,}0) \quad B(1{,}0{,}0) \quad C(0{,}1{,}0) \quad D(1{,}1{,}1)$$

Trouver le centre et le rayon de la sphère inscrite dans le tétraèdre $ABCD$, c'est à dire tangente à chaque face du tétraèdre et intérieure à celui-ci.

42

Soit f la fonction

$$(a,b) \mapsto \int_0^{\infty} (x^2 + ax + b)^2 e^{-2x} dx$$

En quel(s) point(s) la fonction atteint-elle son minimum?
Le calculer

43

1. Résoudre l'équation différentielle

$$xy' + \frac{3x+4}{2(x+1)} y = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

2. Existe-t-il des solutions sur $]-1,+\infty[$?
   Si oui, tracer le graphe de telles solutions.

44

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que la série de terme général

$$u_n = (n^7 + 3n^6)^{\frac{1}{7}} - (P(n))^{\frac{1}{3}}$$

soit convergente.

45

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de période 2π définie par

$$\forall t \in [-\pi,\pi], \quad f(t) = t^4 - kt^2$$

1. Déterminer $k \in \mathbb{R}$ tels que les coefficients de Fourier de f soient les plus simples possibles.
2. Développer alors f en série de Fourier et en déduire les sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}$$

46

Étant donné un entier naturel a, on appelle diviseur propre de a tout diviseur de a différent de a. Deux entiers naturels différents de 0 sont dits *amis* si chacun d'eux est égal à la somme des diviseurs propres de l'autre. Écrire un algorithme qui détermine tous les couples d'entiers amis inférieurs ou égaux à 1500.

47

Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Écrire une procédure d'arguments p et ε déterminant le plus petit entier N tel que $|u_{N+p} - u_N| < \varepsilon$.

48

Application à la cinétique chimique

On aborde ici quelques aspects de la cinétique chimique dans le cas d'un système réactionnel homogène (monophasé) et isochore.

Présentation

L'objet de la **cinétique chimique** est l'étude de la vitesse à laquelle s'effectue une réaction chimique. En cinétique homogène l'étude d'une réaction se ramène donc à la mesure d'une vitesse de réaction à différents instants.

Considérons la réaction :

$$A + B \longrightarrow C$$

Désignons par n_A, n_B et n_C les nombres de moles des substances A, B et C. Leurs variations pendant l'intervalle de temps dt sont telles que l'on ait :

$$-dn_A = -dn_B = dn_C = d\xi$$

- Le signe - traduit le fait que n_A et n_B diminuent pendant que n_C augmente.
- $d\xi$ est la variation pendant le temps dt du **degré d'avancement** ξ de la réaction.

On peut donc définir la vitesse de réaction par les expressions suivantes :

$$v = -\frac{dn_A}{dt} = -\frac{dn_B}{dt} = \frac{dn_C}{dt}$$

Si la réaction est réalisée à *volume constant*, on peut utiliser les concentrations molaires. On a alors :

$$v = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt} = \frac{d[C]}{dt}$$

L'avancement de la réaction est défini par $\xi_V(t)$, avancement volumiqe à l'instant t.

En partant des concentrations $[A]_{t=0} = a$, $[B]_{t=0} = b$ et $[C]_{t=0} = 0$, on a le tableau suivant :

Concentration	$[A]$	$[B]$	$[C]$
$t=0$	a	b	0
t	$a-\xi_V$	$b-\xi_V$	ξ_V

Ordre de la réaction . Une réaction est dite *simple* si sa vitesse de réaction peut se mettre sous la forme :

$$v = k[A]^p[B]^q$$

Les exposants p et q sont les *ordres partiels* par rapport aux constituants A et B. $p+q$ est l'*ordre total* de la réaction. k est la *constante de vitesse de réaction*.

Notre réaction sera considérée d'ordre 1 par rapport à A et B. La vitesse volumique est donc :

$$\boxed{v = -\frac{[A]}{dt} = k[A][B]}$$

Mise en œuvre avec `Maple`

En respectant les notations de la présentation :

1. Définir à l'instant t les concentrations de chaque espèce en fonction des concentrations initiales a,b,c et de l'avancement volumique ξ_V.
2. Écrire l'équation différentielle vérifiée par les concentrations en A et B.

3. Résoudre cette équation en $\xi(t)$, compte tenu de la condition initiale en ξ.
4. Simplifier l'expression obtenue en remarquant que toutes les variables sont positives.
5. Affecter la solution.

Temps de demi-réaction . On appelle temps de demi-réaction τ le temps nécessaire pour que la concentration d'une substance réagissante soit diminuée de moitié.

Calculer ce temps dans le cas ou le réactif limitant est A.

Dégénérescence de l'ordre . Si on effectue la réaction précédente avec un très grand exès de B ($b >> a$), on peut alors négliger la consommation de B par rapport à celle de A.

1. Écrire la requète `Maple` qui donne la concentration en A.
2. Pour $b >> a$, faire un développement limité (de Taylor) de la concentration précédente, en $a = 0$ et à l'ordre 2. Conclure.

Étude de deux réactions successives

On se limite aux réactions suivantes :

$$A \longrightarrow B \quad \text{et} \quad B \longrightarrow C$$

Supposons la première réaction d'ordre 1 par rapport à A, de constante de vitesse k_1, et la deuxième réaction d'ordre 1 par rapport à B, de constante de vitesse k_2. On notera ξ_{V1} et ξ_{V2} les avancements volumiques respectifs.

Partant des concentrations

$$[A]_{t=0} = a,\ [B]_{t=0} = 0 \text{ et } [C]_{t=0} = 0$$

on a le tableau suivant:

Concentration	$[A]$	$[B]$	$[C]$
$t = 0$	a	0	0
t	$a - \xi_{V1}$	$\xi_{V1} - \xi_{V2}$	ξ_{V2}

On a donc successivement:

$$\left\{\begin{array}{lcl} -\frac{d[A]}{dt} & = & k_1[A] \\ \frac{d[B]}{dt} & = & k_1[A] - k_2[B] \\ \frac{d[C]}{dt} & = & k_2[B] \end{array}\right.$$

Deux équations suffisant à définir ξ_{V1} et ξ_{V2}, nous retiendrons les deux premières.

1. Définir à linstant t, les concentrations de chaque espèce en fonction de la concentration initiale a et des avancements volumiques ξ_{V1} et ξ_{V2}.
2. Écrire les deux équations différentielles vérifiées par les concentrations en A et B.
3. Résoudre le système différentiel en $\xi_{V1}(t)$ et $\xi_{V2}(t)$, compte tenu des conditions initiales en ξ_{V1} et ξ_{V2}.
4. Affecter la solution.

Tracé des graphes. Tracer sur le même graphe les concentrations de chaque espèce en fonction du temps sur l'intervalle $[0, 10\text{mn}]$. $a = 1\text{mol.l}^{-1}$; $k_1 = 1\text{mn}^{-1}$; $k_2 = 3\text{mn}^{-1}$;

Cas d'un intermédiaire très réactif . (*Approximation de l'état quasi-stationnnaire ou principe de* Bodenstein) Dans le cas précédent, si B est très réactif, alors $k_1 << k_2$. Refaire le tracé pour $k_1 = 0{,}1\text{mn}^{-1}$ et conclure.

Exemple de réactions successives : la synthèse du bromure d'hydrogène La réaction

$$H_2 + Br_2 \longrightarrow 2HBr$$

n'admet pas d'ordre. L'étude expérimentale menée par BODENSTEIN a montré que la vitesse de forrmation de HBr est représentée par l'expression :

$$\frac{d[HBr]}{dt} = \frac{K[H_2]\sqrt{[Br_2]}}{C + \frac{[HBr]}{[Br_2]}} \qquad (5)$$

On peut interpréter ce résultat par les réactions successives :

$$\left\{\begin{array}{rcll} Br_2 & \longrightarrow & 2Br & (1) \\ Br + H_2 & \longrightarrow & HBr + H & (2) \\ H + Br_2 & \longrightarrow & HBr + Br & (3) \\ H + HBr & \longrightarrow & H_2 + Br & (4) \\ Br + Br & \longrightarrow & Br_2 & (5) \end{array}\right.$$

dont les constantes de vitesse sont k_1, k_2, k_3, k_4 et k_5.

On admet que pour chaque processus élémentaire, les ordres partiels sont toujours égaux aux coefficients de l'équation [2] Le bromure d'hydrogène se forme par les réactions (2) et (3), mais il est détruit par la réaction (4). Sa vitesse réelle de formation est donc:

$$\frac{d[HBr]}{dt} = k_2[Br][H_2] + k_3[H][Br_2] - k_4[H][HBr] \qquad (6)$$

Principe de l'état stationnaire. La concentration en *atomes libres* étant toujours très faible, on admet qu'il s'établit très vite, après une courte période d'induction, un **état de concentration stationnaire** dans lequel la vitesse de formation des atomes est égale à leur vitesse de destruction.

Donc, pour les atomes d'hydrogène produits par la réaction (2) et détruits par les réactions (3) et (4) :

$$k_2[Br][H_2] = k_3[H][Br_2] + k_4[H][HBr] \qquad (7)$$

et pour les atomes de brome produits par les réactions (1), (3) et (4) et détruits par les réactions (2) et (5) :

$$k_1[Br_2]+k_3[H][Br_2]+k_4[H][HBr] = k_2[Br][H_2]+k_5[Br]^2 \qquad (8)$$

1. Dans `Maple`, définir les équations 6, 7 et 8.
2. Exprimer alors $\frac{d[HBr]}{dr}$ en fonction des k_i, H_2, Br_2 et $[HBr]$.
3. Conclure en comparant à l'équation de BODENSTEIN (5).

49

Système triphasé Écrire une fonction `syst_tri(m, phi)` qui représente graphiquement la représentation de FRESNEL d'un système triphasé de module `m` et de déphasage `phi`.

50

Théorème de FERRARIS On considère un enroulement statorique par pôles conséquents (figure 3).

On suppose que l'induction créée dans un pôle est sinusoïdale. Si on appelle D le double intervalle polaire, et que le champ est maximal pour $x = 0$, l'expression du champ créé par cet enroulement est donc de la forme

$$B_1 : (x,B,D) \mapsto B \sin \frac{2\pi x}{D}$$

2. Dans ce cas particulier, l'ordre total se confond avec la molécularité.

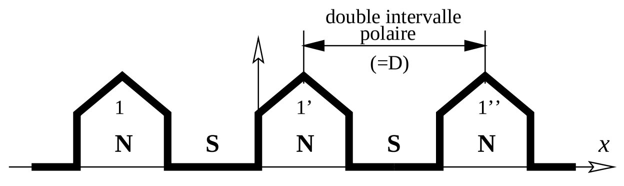

FIG. 3 – *Enroulement par pôles conséquents.*

Cas d'un enroulement triphasé (figure 4) Dans ce cas, le champ sera la résultante de trois champs créés individuellements dans chacun des enroulements.

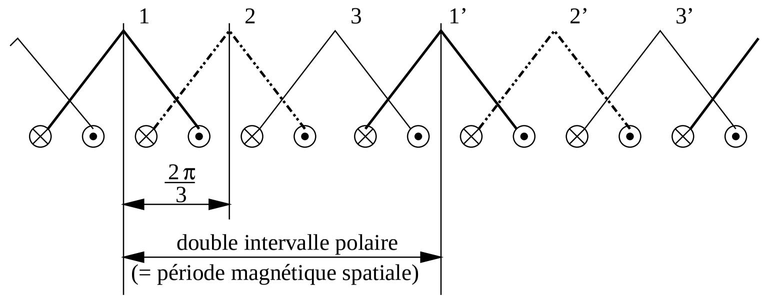

FIG. 4 – *Enroulements triphasés.*

Le champ créé par l'enroulement $22'2''$ est le même que le champ créé par l'enroulement $11'1''$, à une translation de $\frac{1}{3} \times D$.

De même, le champ créé par l'enroulement $33'3''$ est le même que le champ créé par l'enroulement $11'1''$, à une translation de $\frac{2}{3} \times D$.

Dans ce cas, le champ est la résultante des trois champs élémentaires décalés dans l'espace :

$$\begin{cases} B_1 : (x,B,D) \mapsto B \sin \frac{2\pi x}{D} \\ B_2 : (x,B,D) \mapsto B \sin \frac{2\pi}{D}(x - \frac{D}{3}) \\ B_3 : (x,B,D) \mapsto B \sin \frac{2\pi}{D}(x - \frac{2D}{3} \end{cases}$$

1. Définir les trois fonctions B_1, B_2 et B_3.
2. Représenter les sur un même graphique
3. Tracer la

Alimentation avec des tensions sinusoïdales Il suffit de donner une amplitude variable au paramètre `B`. Pour les trois enroulements, on prend respectivement les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} A_1(t) = \cos \omega t \\ A_2(t) = \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ A_3(t) = \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{cases}$$

avec $\omega = 2\pi f$ et $f = 50\text{Hz}$.

4. Définir les fonctions A_1, A_2 et A_3.
5. Définir les trois champs définitifs, fonctions de x et de t

$$\begin{cases} champ_1(x,t) = B_1(x,A_1(t),1) \\ champ_2(x,t) = B_2(x,A_2(t),1) \\ champ_3(x,t) = B_3(x,A_3(t),1) \end{cases}$$

6. Vérifier par une animation que le champ résultant est bien «tournant» (fonction `animate`).
7. Vérifier de même qu'une inversion de deux phases provoque un changement de sens de parcours du champ magnétique.

Indications : Voir l'aide sur la fonction `animate`

51

Transformateur monophasé à vide. Le transformateur à étudier est à deux colonnes (noyaux), portant chacun $\frac{N}{2}$ spires primaires. La longueur d'un noyau est $L_n = 28$cm, sa section utile $S_n = 12\text{cm}^2$, la longueur utile de chacune des culasses, $L_c = 11$cm, leur section $S_c = 15\text{cm}^2$. On néglige les phénomènes d'hystérésis et de courants de FOUCAULT. Dans les masses ferromagnétiques, le champ H (At/m) est relié à l'induction B (T) par la relation :

$$H = 250B + 30B^7$$

La tension d'alimentation est :

$$u(t) = U_m \cos \omega t \ (\ \omega = 100\pi \text{rd/s} \ , \ U_m = 220\sqrt{2}\text{V} \ )$$

1. Dans une nouvelle page `maple` entrer toutes les constantes du problème (`Ln,Sn,Lc,Sc,omega,Bmc,U`).
2. L'induction maximale dans les culasses doit être

   $$B_{mc} = 1{,}44\text{T}$$

   Déterminer le nombre total de spires primaire N. On demande pour cela de ne faire aucun calcul, mais simplement d'écrire une instruction pour résoudre un système d'équation ou on trouvera entre autre, la formule de BOUCHEROT.
3. On néglige les joints entre noyau et culasse. Déterminer l'expression de la valeur instantanée du courant $i(t)$. Là encore, inutile de calculer, laisser `maple` résoudre l'expression issue du théorème d'AMPÈRE. Tracer $i(t)$ sur une période.
4. Donner l'expression de $f_1(t)$: fondamental de $i(t)$.
5. Sur le même graphe, tracer $i(t)$, $f_1(t)$ et $i(t) - f_1(t)$. Que représente $i(t) - f_1(t)$?
6. Pour $i(t)$ calculer :
   - sa valeur de crête,
   - sa valeur efficace,
   - l'expression de son fondamental,
7. Calculer le taux de distorsion harmonique défini par :

   $$\frac{E_h}{E_f} \times 100$$

   avec E_f valeur efficace du fondamental et E_h valeur efficace de l'ensemble des harmoniques.

52

Critère de ROUTH:

Énoncé du critère Pour que le système de fonction de transfert

$$\frac{b_0 + b_1 \times (j\omega) + b_2 \times (j\omega)^2 + \ldots + b_m \times (j\omega)^m}{a_0 + a_1 \times (j\omega) + a_2 \times (j\omega)^2 + \ldots + a_n \times (j\omega)^n}$$

soit stable, il faut et il suffit:

1. que tous les coefficients $a_i (i \leq n)$ soient **présents** ;
2. que tous les coefficients $a_i (i \leq n)$ soient de **même signe**;
3. que tous les termes de la $1^{ère}$ colonne du tableau ci dessous soient **positifs:**

$(j\omega)^n$	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$
$(j\omega)^{n-1}$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$
$(j\omega)^{n-2}$	c_n	c_{n-2}	c_{n-4}	$\cdots$
$(j\omega)^{n-3}$	c_{n-1}	c_{n-3}	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$(j\omega)^{n-i}$	d_n	d_{n-2}	d_{n-4}	$\cdots$

$i \in \{0, \cdots, n\}$

Les coefficients successifs sont formés comme indiqué ci dessous:[3]

$$c_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \qquad c_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$
$$c_{n-1} = \frac{c_n a_{n-3} - a_{n-1}c_{n-2}}{c_n} \qquad c_{n-3} = \frac{c_n a_{n-5} - a_{n-1}c_{n-4}}{c_n}$$

Afin de bien décomposer les conditions du critère en les testant séparément, il est proposé de décomposer le programme en plusieurs étapes élémentaires.

1. Écrire une fonction `critère12` qui reçoit une fraction rationnelle d'indéterminée X et qui renvoie *true* si les conditions 1 et 2 du critère sont vérifiées *false* sinon.
2. Écrire une fonction `tabdenom` qui reçoit une fraction rationnelle d'indéterminée X et qui renvoie un tableau de réels contenant les coefficients du dénominateur rangés dans l'ordre décroissant des puissances.

   Exemple :

   ```
   > tabdenom(1 / (3 + 2*X + X*X));
   ```

   $$[1,2,3]$$

3. Écrire une fonction `tabrouth` qui reçoit un tableau de coefficients et qui renvoie un système d'inéquations correspondant aux conditions sur la première colonne du tableau de Routh.
4. À partir des programmes précédents, écrire une fonction `routh` qui reçoit une fraction rationnelle d'indéterminée X et qui renvoie *false* si le système est instable, ou sinon, un système d'inéquations correspondant aux conditions sur la première colonne du tableau de Routh.

   Exemple :

   ```
   > routh(K / (K + (1 + 0.1*X)^3));
   ```

   $$\{-1 < K, K < 8\}$$

3. On reproduit le procédé de calcul pour les lignes suivantes, chaque ligne étant obtenue à partir des 2 lignes précédentes. Il faut continuer jusqu'à ce que tous les coefficients d'une même ligne soient nuls.

ENSAM 1998

53

À quelle condition A est-elle diagonalisable?

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

54

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a + \frac{1}{a} & a^2 + \frac{1}{a^2} \\ a + \frac{1}{a} & 1 & a + \frac{1}{a} \\ a^2 + \frac{1}{a^2} & a + \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

- Condition nécessaire et suffisante sur a pour que A soit diagonalisable?
- Quand A est diagonalisable, trouver la matrice de passage P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Vérifier.

55

Soit
$$A = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{v}{u} & \frac{w}{u} \\ \frac{u}{v} & -\frac{1}{2} & \frac{w}{v} \\ \frac{u}{w} & \frac{v}{w} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable?
- Trouver u, v, et w pour que A soit orthogonale.

56

Déterminer les coefficients a, b, c, d et e pour que la fonction f:
$$x \mapsto f(x) = \sinh(x) - \frac{ax + bx^3 + cx^5}{1 + dx^2 + ex^4}$$
soit un infiniment petit d'ordre le plus élevé possible au voisinage de 0. Donner alors un équivalent de f.

57

Soient une sphère de centre O, de rayon 1 et un cylindre de centre $\Omega(0,\frac{1}{2},0)$, de rayon $\frac{1}{2}$, Γ est l'intersection de la sphère et du cylindre.

1. paramétrer Γ.
2. Tracer Γ.
3. Longueur de Γ.

Indications : Utiliser `plot[spacecurve]`

58

1. Tracer la courbe
$$\begin{cases} x = t^3 - 4t \\ y = 2t^2 - 3 \end{cases}$$
2. Calculer l'angle des tangentes au point double.

59

Extremas de la fonction
$$(x,y) \mapsto xe^y + ye^x$$

60

Soit $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ défini par
$$\begin{cases} T_0 = 1, T_1 = X \\ \forall n \geq 2, T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2} \end{cases}$$
Écrire une procédure permettant de calculer T_n.

61

Soit la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver une base orthonormée dans laquelle elle s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

62

Soit le produit scalaire :

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_4[X]$.

63

Soit l'équation différentielle

$$x(x^2+1)y' - (x^2-1)y = -2x$$

1. Donner les solutions, en existe-t-il sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer qu'il existe un point A tel que toutes les tangentes aux courbes intégrales au point d'abscisse 2 soient concourantes en ce point.

64

On pose :

$$r^2 = r+1, a = r, b = r-1$$

et

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b & -2 & 1 \\ a & -1 & b \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$$

Quelle est la nature de la transformation géométrique associée à A?

65

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & c & d \\ e & f & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer a, b, c, d, e et f pour que les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

forment une base de vecteurs propres.

66

Déterminer les zéros de

$$P = X^4 - X^3 - 2X^2 - 2X - 1$$

Décomposer P en facteurs irréductibles.

67

Réduire dans une base orthonormale la forme quadratique :

$$q(x,y,z) = x^2 - 2xy + 2xz + 2yz$$

68

$$P(X) = X^4 + aX^3 + \sqrt{3}X^2 + X + b$$

Donner les valeurs de a et b pour que $2+2i$ soit racine. Factoriser P dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$.

69

Image du cercle unité par l'application

$$z \mapsto \frac{2+i}{z+1}$$

70

On définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_7[X]$ par :

$$\langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{10} P(\frac{k}{10})Q(\frac{k}{10})$$

1. Projection orthogonale sur $\mathbb{R}_3[X]$ de $12X^7+5X^6+X+1$?
2. Tracer les graphes des fonctions correspondantes.

71

Calculer A^n avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

72

Pour le produit scalaire :

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 fg$$

sur l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_4[X]$, puis calculer la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_4[X]$ de la fonction

$$x \mapsto 1- \mid 2x-1 \mid$$

Trcer les graphes des fonctions correspondantes.

73

Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

est diagonalisable dans une base indépendante de a, b et c, qu'elle est inversible, puis calculer A^n.

74

Soit f la fonction paire, 2–périodique coïncidant avec la fonction $x \mapsto x^7$ sur $[0,1]$. Calculer les coefficients de FOURIER de f. Représenter sur un même graphique, f, le fondamental de f et la somme des harmoniques.

ENSAM 1999

75

Soit A la matrice carrée de dimension 5 telle que

$$\begin{cases} a_{ij} = 2 \text{ si } i = j \\ a_{ij} = 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Calculer A^n

76

Soit f la fonction paire, 2π–périodique, définie sur $[0,\pi]$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

1. Déterminer les coefficients de Fourier de f.
2. Montrer que l'on peut choisir a, b et c pour que la série de Fourier de f soit
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$
Représenter alors le graphe de f sur $[-\pi,\pi]$.
3. En déduire la valeur de
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

77

Calculer le reste de la division euclidienne de

$$x^n + 2x^m + 1$$

par

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

n et m étant deux entiers naturels.

Vérifier le résultat pour $n = 43$ et $m = 100$.

78

Résoudre

$$xy' + (1-x)y = \frac{xe^x}{x^4+1}$$

Tracer quelques courbes intégrales. Y a-t-il des solutions continues sur $\mathbb{R}$?

79

Soient a, b, c trois réels et

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'ensemble des matrices M telles que $M^2 = I_3$.
2. Interpréter géométriquement la forme de ces matrices.

ENSAM 2000

80

On considère l'équation différentielle $y''-2y'+y = xe^{-x}\cos x$.

1. Résoudre l'équation avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. On note f cette solution.
2. Vérifier que f est bien solution de l'équation.
3. Tracer le graphe de f sur $[-3{,}2]$
4. Résoudre l'équation $f(x) = -\frac{1}{4}$

81

Soit $P(X) = 4X^4 - 16X^3 + 2X^2 + 28X - 49$.

1. Trouver les zéros de P.
2. Factoriser P sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Calculer la somme des cubes des zéros de P. Expliquer pourquoi c'est un entier.

82

Soit une suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par $u_0 \in \mathbb{N}$ et

$$u_{n+1} = \begin{cases} 1 \text{ si } u_n = 1 \\ \frac{u_n}{2} \text{ si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Écrire une fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Écrire une procédure d'arguments n et u_0 donnant u_n.
3. On conjecture qu'il existe pour tout u_0 un entier n tel que $u_n = 1$. Écrire une procédure donnant le nombre d'itérations pour arriver à $u_n = 1$ avec u_0 donné.

83

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

Déterminer suivant les valeurs de a, b et c la dimension de l'espace vectoriel E constitué des matrices $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^3)$ telles que

$$AM = MA$$

84

Soit

$$f_a : x \mapsto \frac{(x^3 + ax - 3)e^{\frac{1}{x}}}{1+x}$$

et C_a sa courbe représentative. Tracer quelques courbes C_a. Étudier les asymptotes éventuelles.

Pour $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, existe-t-il des courbes C_a passant par ce point? Donner la courbe C_a passant par $(5,-1)$ et donner une valeur approchée du minimum.

85

On considère la fonction :

$$f_a : x \mapsto \frac{(2ax^2 + x - a)e^{\arctan(x^2-x+1)}}{\sqrt{1+x^2}}$$

Tracer des courbes pour différentes valeurs de a. Déterminer les deux points communs à toutes les courbes. Étude des branches infinies.

86

Soit

$$P = X^3 + aX^2 + aX + 1$$

avec $a \in \mathbb{C}$. Trouver a pour que P ait deux zéros dont la somme soit égale à 1.

87

Soit

$$A_n = t^n + \frac{1}{t^n}$$

- Montrer que $A_n = A_1 A_{n-1} - A_{n-2}$ et en déduire que

$$A_n = P_n(A_1)$$

ou P_n est un polynôme.
- Faire un programme qui calcule P_n.
- Calculer et linéariser $P_n(2\cos x)$ pour n variant de 0 à 10. Que peut-on dire?

88

Trouver (a,b,c) tel que

$$\int \frac{ax^4 + bx^2 + c}{(x-1)^3(x+2)^5}dx$$

soit une fraction rationnelle.

89

Soit

$$P = X^4 + aX^3 + \sqrt{3}X^2 + BX$$

Trouver a et b réels afin que $1+2i$ soit zéro de P. Déterminer alors les autres zéros.

Annexe A

Memento `Maple`

A.1 Les nombres

`Pi` : π (3.14...)

`I` : Nombre complexe

`infinity` : ∞

A.1.1 Opérations sur les entiers

`iquo(a,b)` : quotient entier de a par b.

`irem(a,b)` : reste dans la division euclidienne de a par b.

`ifactor(a)` : décomposition de a en produit de facteurs premiers.

`ceil(a)` :

A.1.2 Rationnels

`numer(a)` : numérateur de a

`denom(a)` : dénominateur de a

A.1.3 Réels

`Digits` : variable système $\rightarrow$ nombre de chiffres.

`evalf(x)` : évaluation décimale de x.

`evalf(x,n)` : évaluation de x avec n chiffres.

`floor(x)` : partie entière de x.

`round(x)` : entier le plus proche de x.

`frac(x)` : partie fractionnaire de x.

A.1.4 Complexes

`evalc(z)` : met z sous forme algébrique formelle.

`Re(z), Im(z)` : partie réelle et imaginaire de z.

`conjugate(z)` : conjugué de z.

`argument(z)` : argument de z (entre $-\pi$ et π).

`abs(z)` : module de z.

A.2 Fonctions numériques

Dans la plupart des cas, `Maple` opère sur des complexes.

A.2.1 Fonctions prédéfinies

Fonctions usuelles : `abs`, `sqrt`, `sin`, `cos`, `tan`, `cot`.

Fonctions trigonométriques inverses : `arcsin`, `arccos`, `arctan`.

Fonctions hyperboliques : `sinh`, `cosh`, `tanh`, `tanh`, `coth`.

Exponentielle, logarithme : `exp`, `ln`, `log10`.

Élévation à la puissance : x^y peut s'écrire `x^y` ou `x**y`.

factorielle : `n!` ou `factorial(n)`

C_p^n : `binomial(n,p)`.

A.2.2 Fonctions définies par l'utilisateur

On peut définir ses propres fonctions à partir des fonctions prédéfinies et des opérateurs `+`, `-`, `*`, `/`, et `@`. Ce dernier opérateur symbolise la composition des applications.

Exemple. La fonction $f : x \longmapsto \log \sqrt{x}$ peut être définie avec `Maple` par :

```
f := log10 @ sqrt;
```

```
f := x -> log10(sqrt(x));
```

```
P := log10(sqrt(x));
f := unapply(P, x);
```

ou plus simplement :

```
f := unapply(log10(sqrt(x)), x);
```

Dans bien des cas, c'est cette dernière possibilité qui fonctionne le mieux.

Remarque : il ne faut pas confondre une **expression** avec une **fonction**. Ainsi, `log10(sqrt(x))` est une **expression** (ou apparaît x) et `x -> log10(sqrt(x))` est une **fonction**.

Composition n **fois** : $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{\times n}$ s'écrit `f @@ n`

A.3 Séquences, listes, ensembles

Une **séquence** est une suite d'objets de nature quelconque, appelés opérandes, séparés par des virgules. `NULL` désigne la séquence vide.

Une séquence mise entre crochets (`[]`) donne une **liste**. Une séquence mise entre accolades (`{}`) donne un **ensemble**.

Les séquences, listes ou ensembles peuvent être affectés à des variables.

`seq (f(i), i=n0 .. n1)` : crée la séquence des images par f des entiers de n_0 à n_1.

`nops(T)` : nombre d'opérandes de T (séquence, liste ou ensemble).

`op(T)` : donne la séquence des opérandes de T (qui peut être une liste ou un ensemble).

`op(k,T)` : donne le $k^{\text{ème}}$ de T (mais ne permet pas de le modifier).

Opérations sur les ensembles : `union`, `intersect`, `minus`.

A.4 Polynômes et fractions rationnelles

Comme mentionné précédemment, il est important de différencier une expression d'une fonction. Pour la suite,

- *expr* représente une expression,
- f représente une fonction,
- P et Q sont des expressions de type polynômial en x,
- F une expression de type fraction rationnelle d'intéterminée x.

Remarque : Si f est une fonction, $f(x)$ est une expression.

`degree(P,x)` : **degré** de P pour la variable x.

`coeff(P,x,n)` : **coefficient** du terme en x^n de P.

`sort(P)` : écrit P selon les **puissances décroissantes**.

`quo(P,Q,x)` : **quotient** de P par Q.

`rem(P,Q,x)` : **reste** dans la division euclidienne de P par Q.

`solve(P,x)` : fournit la séquence des **racines** de P.

`factor(P)` : **factorise** P. À utiliser de préférence avec la liste des racines : `E := {solve(P,x)}: factor(P,E);`

`normal(F)` : met F sous la forme $\frac{P}{Q}$.

`numer(F)` : numérateur de F.

`denom(F)` : dénominateur de F.

`convert(F,parfrac,x)` : décompose F en éléments simples.

A.5 Les expressions logiques

Une expression logique est de type *booléen*.

Exemple : `x<10` est une expression logique qui vaut `true` (vrai) si $x < 10$ et `false` sinon.

Les expressions logiques simples utilisent en général les opérateurs relationnels :

`<, >, <=, >=, =, <>`

Les expressions logiques peuvent être composées avec les opérateurs logiques pour constituer de nouvelles expressions logiques plus complexes. Les opérateurs logiques sont :

`and, or, not`

Exemples : `x = 10` est équivalente à `not ( x<>10 )`

$0 \leq x < 1$ se traduit par `(x>=0) and (x<1)`

A.6 Manipulations sur les expressions

`expand(expr)` : développe l'expression *expr*.

`combine(expr, `*options*`)` : fonction réciproque de la précédente avec les options facultatives `trig`, `ln`, `exp`, `power`.

`simplify(expr, `*options*`)` : simplifie l'expression avec les options facultatives `trig`, `power`, `sqrt`.

`subs(y1=x1, y2=x2, ..., expr)` : crée une nouvelle expression en remplaçant les x_i de *expr* par les y_i.

`convert(expr, `*options*`)` : convertit *expr* avec les options `exp`, `ln`, `expln`, `sincos`, `tan`, `trig`, `expsincos`, favorisant ainsi une forme d'écriture.

`solve(expr,x)` : résoud de façon formelle l'équation $expr = 0$ en x.

`solve(expr1=expr2,x)` : résoud de façon formelle l'équation $expr1 = expr2$ en x.

`solve(equ1, equ2, ...,x1,x2,...)` : résoud un ensemble d'équations avec les inconnues x_1, x_2, ...

`fsolve(expr,x)` : résoud de manière numérique.

A.7 Analyse et tracé de courbes

`diff(expr, x)` : donne l'expression dérivée par rapport à x de *expr*. C'est une expression.

`diff(expr,x,x)` : donne la dérivée seconde de *expr*. On peut changer les variables de dérivation pour dériver les fonctions de plusieurs vriables.

`D(f)` : donne la fonction dérivée de f. C'est une fonction.

`(D@@n)(f)` : donne la dérivée n$^{\text{ième}}$ de f.

`limit(expr, x=a, `*options*`)` : donne la limite de l'expression *expr* lorsque x tend vers a. Options facultatives: `left`, `right`.

`series(expr, x=a, n)` : donne le développement limité de $expr$ en $x = a$, à l'ordre $n-1$ (reste un $\bigcirc(x^n)$) sauf si des simplifications apparaissent.

`int(expr, x)` : primitive de $expr$ de la variable x.

`int(expr, x=a..b)` : intégrale entre a et b de $expr$.

`plot(expr, x=a..b, options)` : trace la courbe représentative de $expr$ pour x entre a et b. Les options facultatives permettent de fixer le repère, les couleurs... $Expr$ peut être remplacé par un ensemble d'expressions, ou par une liste de couples $[x_k,y_k]$, pour tracer la ligne brisée de sommets A_k définis par leurs coordonnées.

`plot([x(t), y(t), t=a..b], options)` : permet le tracé de courbes paramétrées.

`plot[polarplot](r(t), t=a..b, options)` : trace la courbe en polaire définie par $\rho = r(t)$. On peut aussi charger le module `plots` (commande : `with(plots); polarplot(r(t), t=a..b, options)`). Ce module offre de nombreuses possibilités (`display, animate, plot3D` ...).

`dsolve(equ, f(x))` : résoud l'équation différentielle définie par equ en la fonction f de la variable x.

A.8 Matrices et vecteurs

`A := array(1..n, 1..p);` : déclare une matrice $n \times p$. On peut directement entrer entre parenthèses la liste des lignes. Le coefficient de la ligne i et de la colonne j est `A[i,j]`. Un vecteur est déclaré par `U = array(1..n);` ou par la donnée de ses composantes .

`with(linalg);` : permet de charger le module d'algèbre linéaire.

`matrix(n,p,f);` : crée la matrice $n \times p$ dont le terme de ligne i et de colonne j est $f(i,j)$.

`add(A,B);` : addition de matrices.

`multiply(A,B);` : multiplication de matrices.

`evalm(A^ n);` : élévation de la matrice A à la puissance n.

`evalm(lambda*A);` : multiplication de la matrice A par le scalaire λ

`inverse(A);` : inverse de A.

`det(A);` : déterminant de A.

`trace(A);` : trace de A.

`rank(A);` : rang de A.

`transpose(A);` : transpose A.

`eigenvects(A);` : renvoie une séquence comportant autant d'éléments qu'il y a de valeurs propres. Chaque élément de la séquence est une liste de trois composantes :

1. la valeur propre : nombre réel (ou complexe)
2. l'ordre de la valeur propre : nombre entier positif $= n$
3. un ensemble formé des n vecteurs propres

`linsolve(A, v);` : résoud le système $A.x = v$ en x.

`dotprod(u,v);` : produit scalaire des vecteurs u et v.

`crossprod(u,v);` : produit vectoriel de u et v.

`grad(f, [x,y,z]);` : gradient de f des variables x, y et z.

`diverge(f, [x,y,z]);` : divergence de f.

`curl(v, [x,y,z]);` : rotationnel du vecteur v.

A.9 Les structures de commande

A.9.1 Boucle `for`

On l'utilise lorsque le nombre d'itérations est connu.

Syntaxe :

`for` *indice* `from` *début* `by` *pas* `to` *fin* `do`

instructions
`end do;` (ou `od;`)

Le traitement sera effectué pour toutes les valeurs de l'*indice* variant entre les bornes *début* et *fin*, le *pas* étant ajouté à chaque étape. La partie «`by` *pas*» est facultative. Par défaut, le pas est pris à 1.

Exemple : afficher tous les multiples de 7 pris entre 14 et 100 :

```
for i from 14 by 7 to 100 do
   print(i);
od;
```

A.9.2 La boucle `while`

La boucle est exécutée tant que la condition reste vraie.

Syntaxe :
`while` *condition* `do`
instructions
`end do;` (ou `od;`)

A.9.3 La structure conditionnelle `if`

Syntaxe :
`if` *condition* `then`
instructions_1
`else`
instructions_2
`end if;` (ou `fi;`)

Il est bien sûr possible d'utiliser cette structure en
`if` ... then ...
`else if` ... `then` ...
`else if` ... `then` ...
...
`else` ... `end if;`

Index