

Asservissements linéaires

Claude GUÉGANNO
Ingénieur E.N.S.E.R.B.
Agrégé de Génie Électrique

26 octobre 2001

Chapitre 1

Structure d'un système de commande

1.1 Système de commande

1.1.1 Généralités

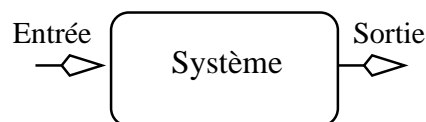
L'automatique a pour objet l'étude des méthodes permettant d'assurer, dans des conditions données, la commande d'un système quelconque.

Les systèmes, ensembles d'éléments reliés entre eux, seront, dans ce cours, essentiellement des objets techniques (éléments mécaniques, hydrauliques, électriques).

Les principes de raisonnements d'abord développés à propos des systèmes techniques se sont avérés utiles pour l'étude de classes variées de systèmes. Ils sont maintenant utilisés pour l'étude de systèmes biologiques, économiques et sociaux, étendant considérablement les domaines d'application de l'automatique.

Commander un système consiste à faire évoluer une grandeur liée à l'état de ce système, appelée grandeur de sortie $s(t)$, en appliquant à ce système une grandeur $e(t)$, appelée grandeur d'entrée, susceptible de faire évoluer la sortie.

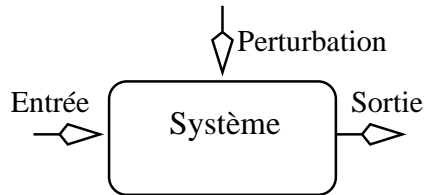
FIG. 1.1 – *Entrée et sortie d'un système*



Ces grandeurs sont des fonctions du temps et peuvent être scalaires ou vectorielles. On peut représenter cette commande par le schéma 1.1. En général, la commande s'effectue avec amplification de puissance. L'énergie disponible à la sortie du système n'est pas fournie par les signaux de commande mais par une source d'énergie que ces signaux de commande servent

à moduler. Il arrive souvent qu'en plus de la grandeur d'entrée maîtrisée par l'utilisateur du système, agit une grandeur $z(t)$, non contrôlée par l'utilisateur et de nature à modifier l'état du système (figure 1.2). $z(t)$ est une *perturbation*.

FIG. 1.2 – *Perturbation*

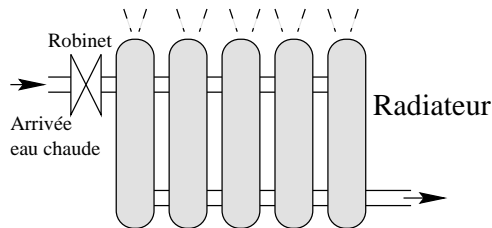


1.1.2 Exemples

Radiateur

Dans une installation de chauffage central d'une maison, chaque radiateur possède un robinet qui permet de modifier le débit d'eau chaude dans le radiateur en fonction de la température souhaitée dans la pièce. Le système physique, constitué du radiateur, du robinet et des canalisations d'entrée et de sortie d'eau se présente comme indiqué sur la figure 1.3.

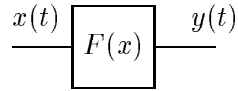
FIG. 1.3 – *Régulation de température*



D'un point de vue fonctionnel, ce système possède une entrée $x(t)$ qui est la commande d'ouverture du robinet, une sortie $y(t)$ qui est la température de la pièce, ainsi qu'une loi qui relie l'entrée à la sortie. Des événements intempéstifs (ouverture d'une fenêtre, d'une porte, peuvent constituer des perturbations pour ce système (\Leftrightarrow modification de la température provoquée par une cause non liée à l'action sur la commande du robinet).

En notant F la fonction qui relie l'entrée à la sortie, ($y = F(x)$), Le système physique de la figure 1.3 se représente alors sous la forme du diagramme fonctionnel de la figure 1.4.

FIG. 1.4 – *Modélisation*



Commande de moteur

La commande de moteur est un cas typique du cours d'asservissements linéaires linéaire. Largement utilisé dans le domaine de la robotique, les asservissements en vitesse ou en position du moteur à courant continu constitueront des exemples privilégiés dans ce cours. L'entrée sera en général une grandeur électrique ou mécanique, la sortie sera une grandeur mécanique.

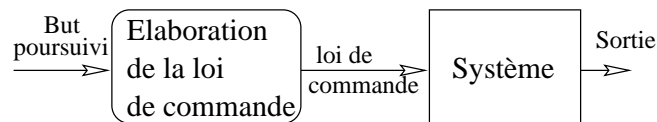
FIG. 1.5 – *Commande de moteur*



1.2 Finalité d'un système de commande

Commander un système consiste à choisir une loi de commande $e(t)$ afin que la sortie $s(t)$ évolue pour répondre à un certain but. Cette loi de commande sera fournie par un organe d'élaboration de la loi de commande en fonction du but assigné (figure 1.6).

FIG. 1.6 – *Élaboration de la loi de commande*



Mais l'organe définissant la loi de commande devra, de plus, assurer «au mieux» de façon optimale, cette commande pour satisfaire un critère de performance.

Par exemple, lors du déplacement d'un véhicule d'un lieu à un autre en suivant un trajet donné, on pourra effectuer le trajet :

1. soit en un temps minimal,
2. soit en consommant le minimum de combustible.

Chacun de ces critères implique une loi de commande différente. D'une façon générale, le choix de la loi de commande d'un système devra s'effectuer en tenant compte de deux objectifs :

1. assurer les évolutions du système d'un état initial donné à un état final donné ;
2. effectuer ces évolutions de manière optimale.

1.3 Commande en boucle ouverte

Un système de commande en boucle ouverte est un système dans lequel le signal de commande $e(t)$ agissant à l'entrée de ce système est indépendant du signal de sortie.

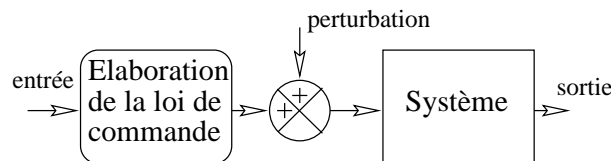
Si le système commandé est bien connu, il est possible à partir de son modèle mathématique, d'établir la relation définissant $s(t)$ à partir de $e(t)$:

$$e(t) \mapsto s(e(t), t) \quad (1.1)$$

Une telle commande présente deux sortes d'inconvénients :

1. s'il existe une perturbation $z(t)$ (voir figure 1.7, la grandeur de sortie sera modifiée ;
2. même en l'absence de perturbation, la relation 1.1 ne sera vérifiée que si le modèle mathématique décrit parfaitement le système. (Or, ce modèle est souvent connu de manière approximative ; il peut évoluer ; la sortie donnée par la relation 1.1 ne sera qu'une valeur approchée de la sortie réelle.

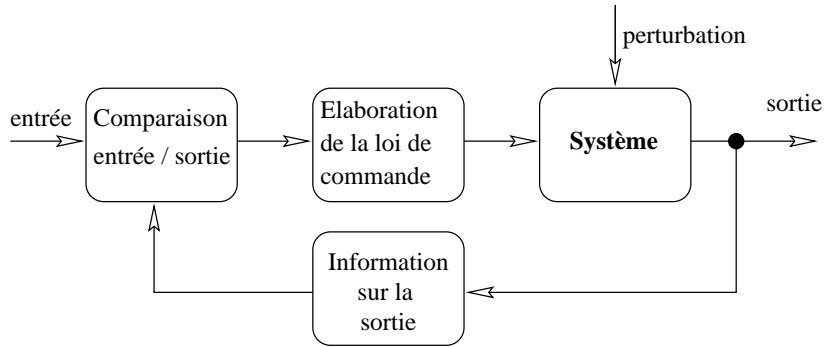
FIG. 1.7 – Action de la perturbation



1.4 Commande en boucle fermée

Pour éviter les inconvénients précédents, il faut que le signal de commande appliqué au système tienne compte, non seulement du signal d'entrée $e(t)$ qui caractérise le but poursuivi, mais aussi du signal $s(t)$ obtenu. Une telle commande qui tient compte du signal de sortie est appelée **commande en boucle fermée**. Le dispositif fournissant l'information sur la sortie est appelé **boucle de retour**. Une commande en boucle fermée a donc la structure indiquée dans la figure 1.8

FIG. 1.8 – Boucle de retour



Les informations fournies par la comparaison entrée/sortie servent à définir la loi de commande et le choix de cette loi de commande s'effectuera en fonction du critère de performance retenu.

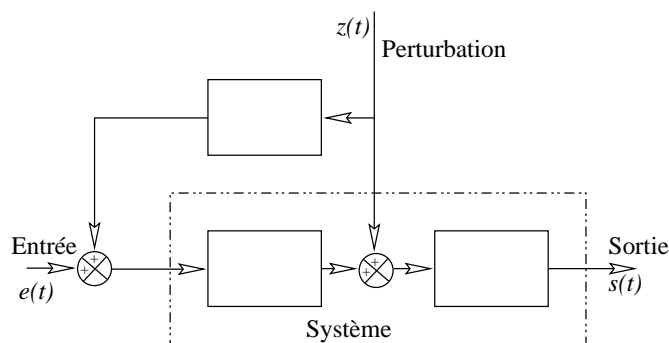
Cette structure est très générale et se retrouve non seulement dans les systèmes techniques mais également, comme déjà indiqué, dans les systèmes biologiques, économiques et sociaux.

1.5 Commande avec anticipation

Lorsqu'une perturbation peut être mesurée, on peut pallier à ses effets en tenant compte de cette mesure à l'entrée du système. Une telle action est dite **anticipatrice**.

Un système en boucle ouverte avec anticipation aura la structure de la figure 1.9. Cette structure de commande permet, en principe, de remédier à l'impossibilité, pour une commande en boucle ouverte, de tenir compte des perturbations.

FIG. 1.9 – Commande avec anticipation



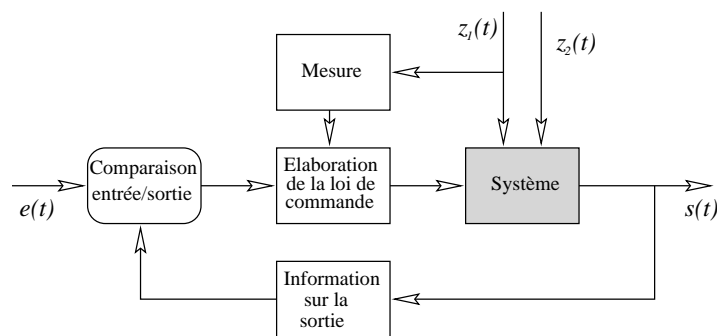
La sortie $s(t)$ peut être définie, si on connaît bien le modèle mathématique

du système par une relation :

$$s(t) = f(e(t), z(t), t) \quad (1.2)$$

Cette commande conserve l'inconvénient déjà cité de la commande en boucle ouverte, c'est à dire de ne donner une commande correcte que si le système réel est connu avec précision par le modèle de la relation 1.2, ce qui est très rarement vérifié.

FIG. 1.10 – *Prise en compte de la perturbation*



On peut également utiliser une action anticipatrice dans un système à boucle fermée. Tenant compte du fait que toutes les perturbations agissant sur un système ne peuvent en général être mesurées, la structure d'une commande en boucle fermée sera alors conforme à la figure 1.10 dans laquelle Z_1 et Z_2 représentent l'un, les pertes mesurables, l'autre celles qui ne le sont pas.

Chapitre 2

Définition et propriétés générales des systèmes linéaires

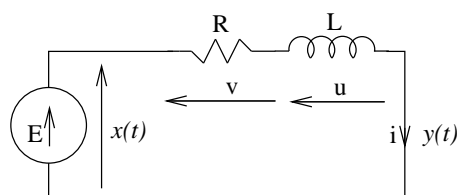
Lorsqu'on étudie un système physique, on commence toujours par rechercher s'il est possible de l'assimiler à un système linéaire.

2.1 Définition

Un système commandé est dit **linéaire** s'il peut être défini par un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Exemple 1

FIG. 2.1 – *Circuit linéaire*



Le circuit de la figure 2.1 a pour entrée x et pour sortie y , avec :

- x : la tension d'alimentation,
- y : le courant dans la maille.

Des équations :

$$\begin{cases} v = Ri \\ u = L \frac{di}{dt} \\ y = i \\ x = E \\ E = u + v \end{cases}$$

on obtient :

$$Ry + L \frac{dy}{dt} = x$$

Il s'agit bien d'une équation différentielle à coefficients constants.

Exemple 2

On commande la vitesse de rotation $\Omega(t)$ de l'arbre d'un moteur à courant continu à flux constant avec la tension $U(t)$ aux bornes de l'inducteur (Figure 2.2.a). Ce moteur entraîne une charge dont le moment d'inertie est J . Le système mécanique présente un frottement visqueux de coefficient f provoquant le couple résistant

$$C_r = f \times \Omega$$

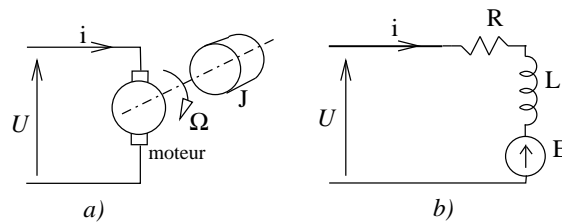
Soit

$$C_e = k \times i$$

le couple électromagnétique. La loi fondamentale de la dynamique donne :

$$\underbrace{C_e}_{\text{Couple moteur}} = \underbrace{C_r + J \times \frac{d\Omega}{dt}}_{\Sigma \text{ Couples résistants}}$$

FIG. 2.2 – Commande de moteur



Électriquement, le schéma équivalent est celui de la figure 2.2.b. E représente la force contre électromotrice du moteur. Son expression est :

$$E = k \times \Omega$$

La loi d'Ohm donne :

$$u = E + Ri + L \frac{di}{dt}$$

On considère le système dont l'entrée est $U(t)$ (commande) et dont la sortie est $\Omega(t)$ (résultat obtenu). Il peut être modélisé par une équation différentielle on apparaîtront les variables U et Ω . Mathématiquement, ceci revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} C_r = f \times \Omega \\ C_e = k \times i \\ C_e = C_r + J \times \frac{d\Omega}{dt} \\ E = k \times \Omega \\ u = E + R \times i + L \times \frac{di}{dt} \end{cases}$$

En éliminant i dans ces équations, on obtient :

$$\frac{k}{LJ}U(t) = \frac{d^2\Omega}{dt^2} + \left(\frac{f}{J} + \frac{R}{L}\right) \times \frac{d\Omega}{dt} + \left(\frac{k^2 + fR}{LJ}\right) \times \Omega \quad (2.1)$$

2.2 Réponse d'un système linéaire

Plus généralement, un système linéaire sera décrit par une équation différentielle du type :

$$a_0y + a_1y^{(1)} + \dots + a_ny^{(n)} = b_0x + b_1x^{(1)} + \dots + b_mx^{(m)} \quad (2.2)$$

avec $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dt^n}$. Ce système est dit d'ordre n .
Pour la suite nous supposerons que $a_0 \neq 0$.

2.2.1 Méthode générale

Il s'agit de résoudre l'équation 2.2 ou $a_0 \neq 0$. On considère le cas où le second membre de l'équation différentielle est l'une des fonctions du temps suivantes : polynôme, fonction exponentielle, fonction sinusoïdale, ou somme de fonctions de types précédents. En posant

$$f(t) = b_0x + b_1x^{(1)} + \dots + b_mx^{(m)}$$

($f(t)$ regroupe tout ce qui est lié à l'entrée, donc connu), il vient :

$$a_0y + a_1y^{(1)} + \dots + a_ny^{(n)} = f(t)$$

$\forall t \geq 0$ la réponse du système est de la forme :

$$y(t) = y_e(t) + y_1(t)$$

avec :

$y_e(t)$: solution particulière de l'équation différentielle,

$y_1(t)$: solution de l'équation différentielle sans second membre.

$y_1(t)$ fait intervenir les racines de l'équation caractéristique :

$$a_0 + a_1p + \dots + a_np^n = 0$$

Soient p_1, p_2, \dots, p_n les n racines de cette équation. Si ces racines sont distinctes, $y_1(t)$ est de la forme :

$$y_1(t) = A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t} + \dots + A_ne^{p_nt}$$

A_1, A_2, \dots, A_n (constantes d'intégration) sont déterminées en pratique, à partir des conditions initiales du problème (valeurs de y et de ses dérivées à l'instant initial). Si le système est d'ordre n , il y a n constantes d'intégration à déterminer : il faut connaître n conditions initiales.

Si les fonctions exponentielles de $y_1(t)$ sont décroissantes :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0^1$$

quand $y_1(t) \approx 0$: le système est en régime permanent ; tant que $y_1(t)$ n'est pas négligeable : le système est en régime transitoire.

Régime permanent

Le régime **permanent** (ou régime **établi**) est représenté par :

$$\boxed{y(t) = y_e(t)}$$

- Il est indépendant des conditions initiales. Celles ci n'interviennent que dans l'expression de $y_1(t)$.
- Le second membre $f(t)$ ayant l'une des formes indiquées précédemment², on sait calculer $y_e(t)$.
- Si $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_k(t)$, alors,

$$y_e(t) = y_{e1}(t) + y_{e2}(t) + \dots + y_{ek}(t)$$

Plus précisément, $y_e(t)$ est la somme des réponses aux $f_i(t)_{i \in [1,k]}$ considérés séparément. Cette propriété, caractéristique des systèmes linéaires constitue le **théorème de superposition**.

Régime transitoire

Il est représenté par

$$y(t) = y_e(t) + y_1(t)$$

Il dépend en particulier :

- des valeurs des racines de l'équation caractéristique ;
- des conditions initiales.

Régime libre

C'est le régime transitoire particulier obtenu lorsque $x(t) = 0, \forall t$, et qu'on étudie l'évolution du système (x, y) , à partir d'un état différent de l'état de repos. Cet état est défini par la donnée de y et de ses dérivées à un instant pris comme origine. On a : $y_e(t) = 0$ d'où $y(t) = y_1(t)$.

Si le système est stable, $y(t)$ tend vers 0. Le système reprend l'état de repos.

2.3 Régime harmonique

Dans le cas des systèmes linéaires, l'étude théorique (réponse, stabilité) peut se réduire à une analyse harmonique.

¹On dit alors que le système est stable

²Souvent, $f(t)$ sera une constante (échelon) ou une équation de droite passant par l'origine (rampe)

Transmittance isochrone

Pour résoudre l'équation 2.2, il est commode de raisonner sur des grandeurs complexes :

$$\underline{X} = X_M e^{j\omega t}$$

On recherche une solution de la forme :

$$\underline{Y} = Y_M e^{j\omega t + \phi}$$

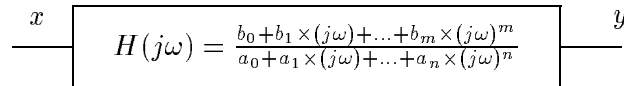
On a :

$$(a_0 + a_1 \times (j\omega) + \dots + a_n \times (j\omega)^n) \times \underline{Y} = (b_0 + b_1 \times (j\omega) + \dots + b_m \times (j\omega)^m) \times \underline{X}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\underline{Y}}{\underline{X}} &= \frac{b_0 + b_1 \times (j\omega) + b_2 \times (j\omega)^2 + \dots + b_m \times (j\omega)^m}{a_0 + a_1 \times (j\omega) + a_2 \times (j\omega)^2 + \dots + a_n \times (j\omega)^n} \\ \Leftrightarrow \frac{Y_M}{X_M} e^{j\phi} &= \frac{b_0 + b_1 \times (j\omega) + \dots + b_m \times (j\omega)^m}{a_0 + a_1 \times (j\omega) + \dots + a_n \times (j\omega)^n} \\ \Leftrightarrow \frac{Y_M}{X_M} e^{j\phi} &= H(j\omega) \end{aligned}$$

avec
$$H(j\omega) = \frac{b_0 + b_1 \times (j\omega) + \dots + b_m \times (j\omega)^m}{a_0 + a_1 \times (j\omega) + \dots + a_n \times (j\omega)^n}$$

$H(j\omega)$ est la *transmittance isochrone* du système dont l'entrée est \underline{X} et la sortie \underline{Y} .



Paramétrage avec $j\omega$ Pour une entrée sinusoïdale donnée, la sortie est également sinusoïdale. La sortie est caractérisée par son argument (amplification ou atténuation du signal d'entrée) et par son déphasage par rapport au signal d'entrée. L'expression

$$\underline{Y}(t) = H(j\omega) \times \underline{X}(t)$$

donne :

$$\begin{cases} Y_M = |H(j\omega)| \times X_M \\ \arg \underline{Y}(t) = \arg H(j\omega) + \arg \underline{X}(t) \end{cases}$$

Il apparaît que pour une entrée sinusoïdale donnée, et un système donné, la réponse ne dépend que de la pulsation du signal d'entrée. C'est pourquoi, on a l'habitude de paramétrer l'entrée et la sortie avec la variable complexe $j\omega$. Les diagrammes de Bode (phase et amplitude) décrivent complètement un système linéaire quelconque. On écrira désormais :

$$\underline{Y}(j\omega) = H(j\omega) \times \underline{X}(j\omega)$$

Entrée périodique non sinusoïdale Un signal périodique quelconque $\underline{X}(t)$ de pulsation ω peut se mettre sous la forme³ :

$$\underline{X}(j\omega) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{j(k\omega t + \phi_k)}$$

Compte tenu du théorème de superposition, valable dans le cas des systèmes linéaires, la sortie $\underline{Y}(j\omega)$ est donc égale à la somme des $\underline{Y}_k(j\omega)$ avec :

$$\underline{Y}_k(j\omega) = H(jk\omega) \times A_k e^{j(k\omega + \phi_k)}$$

L'étude fréquentielle permet donc de prévoir le comportement (la réponse) du système pour toutes les entrées périodiques.

Entrée non périodique On peut considérer un signal non périodique comme la limite vers laquelle tend un signal périodique lorsque sa période tend vers l'infini. La période du signal étant $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $T \rightarrow \infty \Rightarrow \omega \rightarrow 0$. Tout se passe comme si les raies du spectre se rapprochaient au point que ce spectre devienne continu. Il n'y a plus de fréquences isolées. On en conclut que la connaissance de la transmittance isochrone du système ainsi que celle du spectre de la fonction d'entrée permettent de prévoir la réponse du système (rapidité, stabilité, ...).

2.4 Exemple : système du second ordre

On rappelle la forme canonique d'une équation différentielle du second degré.

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + 2z\omega_0 \frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = K\omega_0^2 E(t) \quad (2.3)$$

z est l'amortissement ;

ω_0 est la pulsation propre du système.

Solution de l'équation

Pour $t > 0$, $E(t) = E_0$, une solution particulière est :

$$S(t) = KE_0$$

La solution générale est la somme de cette solution particulière et de la solution de l'équation sans second membre. Les conditions initiales : $S(0) = 0$ et $\left(\frac{dS}{dt}\right)_{t=0} = 0$ permettent de calculer les constantes.

Le polynôme caractéristique est :

$$P(X) = X^2 + 2z\omega_0 X + \omega_0^2$$

³Fourier

Le déterminant de $P(X)$ est $\Delta = 4\omega_0^2(z^2 - 1)$. Dans un système physique, z est une grandeur positive et non nulle. Il suffit donc de traiter les cas⁴ :

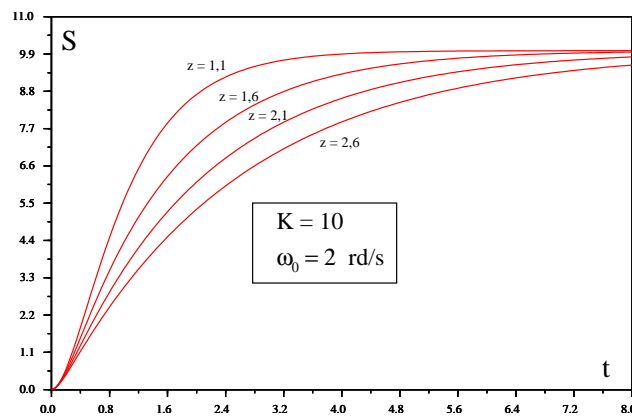
$$\begin{cases} z < 1 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{deux racines complexes conjuguées } r \text{ et } \bar{r} \\ z = 1 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \text{une racine double } r_0 \\ z > 1 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{deux racines réelles } r_1 \text{ et } r_2 \end{cases}$$

$\boxed{z > 1}$ On a $r_1 = -\omega_0 \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$ et $r_2 = -\omega_0 \left(z - \sqrt{z^2 - 1} \right)$. Les deux racines réelles sont négatives. La solution de l'équation sans second membre est de la forme : $S_1(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$ d'où :

$$S(t) = K E_0 \left(1 + \frac{r_2}{r_1 - r_2} e^{r_1 t} - \frac{r_1}{r_1 - r_2} e^{r_2 t} \right)$$

C'est un régime apériodique (figure 2.3).

FIG. 2.3 – Régime apériodique



$\boxed{z = 1}$ Le polynôme caractéristique admet une racine double réelle : $r_0 = -\omega_0$. La solution de l'équation sans second membre est :

$$S_1(t) = A_0 e^{r_0 t} (1 + \omega_0 t)$$

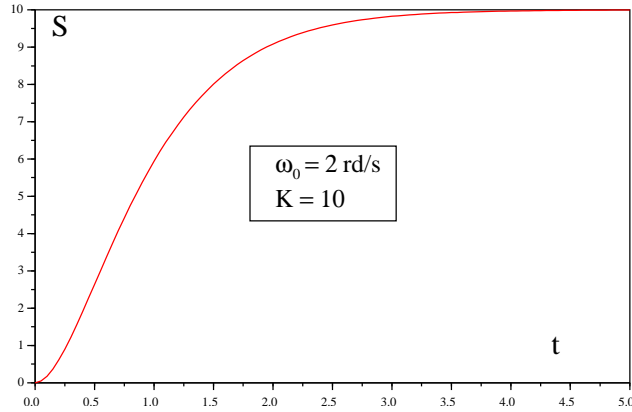
d'où :

$$S(t) = K E_0 (1 - e^{-\omega_0 t} (1 + \omega_0 t))$$

C'est un régime d'amortissement critique (figure 2.4).

⁴Dans un problème de concours, il conviendrait de ne traiter que le cas correspondant à l'application numérique !

FIG. 2.4 – Amortissement critique.



$z < 1$ Le polynôme caractéristique admet deux racines complexes conjuguées. $r = -\omega_0 (z + j\sqrt{1-z^2})$ et $\bar{r} = -\omega_0 (z - j\sqrt{1-z^2})$ La solution de l'équation sans second membre peut être mise sous la forme :

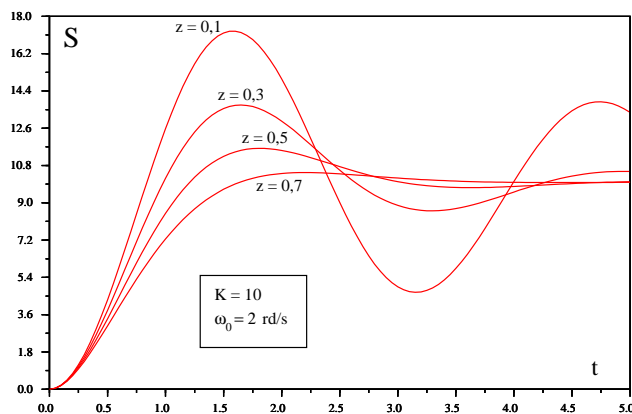
$$S_1(t) = Ae^{-\omega_0 t} \sin(\omega_r t + \phi)$$

avec $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1-z^2}$ d'où :

$$S(t) = KE_0 (1 - e^{-z\omega_0 t} \sin(\omega_r t + \phi))$$

avec $\cos \phi = z$ c'est un régime oscillatoire amorti (figure 2.5).

FIG. 2.5 – Régime oscillatoire amorti.



2.4.1 Transmittance isochrone

L'entrée du système est la tension de consigne $U(j\omega)$. La sortie est la vitesse $\Omega(j\omega)$. La transmittance recherchée est donc la fraction rationnelle

d'inconnue $j\omega$:

$$H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)}$$

On peut directement partir de l'équation différentielle 2.1 obtenue précédemment :

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + 2z\omega_0 \frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = K\omega_0^2 E(t) \quad (2.4)$$

Avec l'approche harmonique, on sait que $\frac{dX}{dt} = (j\omega)X$ et $\frac{d^2 X}{dt^2} = (j\omega)^2 X$. L'équation différentielle devient :

$$(j\omega)^2 \times S(j\omega) + 2z\omega_0(j\omega) \times S(j\omega) + \omega_0^2 \times S(j\omega) = K\omega_0^2 E(j\omega)$$

d'où :

$$H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}(j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}$$

En posant $H_0 = K$, il vient⁵ :

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{2z}{\omega_0}j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}$$

Remarques

Si $z \geq 1$, le dénominateur de $H(j\omega)$ est décomposable en un produit de deux facteurs du premier degré en $j\omega$ d'où :

$$H(j\omega) = H_0 \times \frac{1}{1 + j\tau_1\omega} \times \frac{1}{1 + j\tau_2\omega}$$

avec $\tau_1 \times \tau_2 = \frac{1}{\omega_0^2}$. Le diagramme asymptotique du gain est alors la somme des diagrammes asymptotiques des deux fonctions du premier ordre. Il en va de même pour la courbe de phase.

Si $z < 1$, le diagramme de Bode doit être construit en calculant le module et la phase de $H(j\omega)$ pour différentes valeurs de ω .

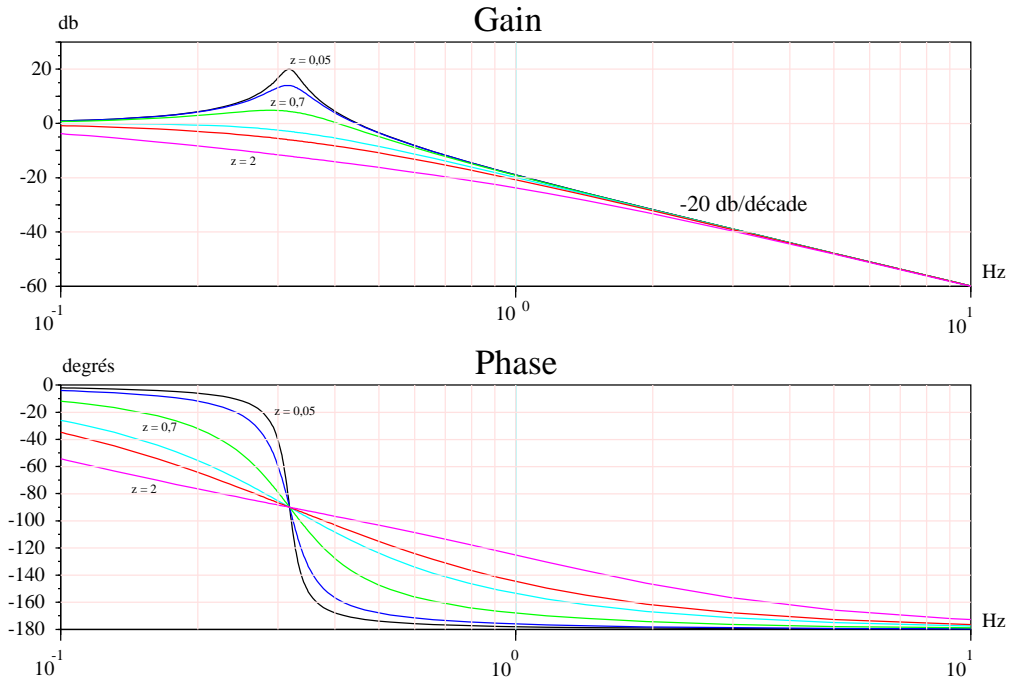
Résonance. Il y a résonance si $z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$; ω variant, $H(j\omega)$ passe par un maximum pour $\omega = \omega_R = \omega_0\sqrt{1 - 2z^2}$.

$$H(\omega_R) = \frac{H_0}{2z\sqrt{1 - z^2}}$$

ω_R est la pulsation de résonance. Elle est inférieure à la pulsation propre. Le coefficient $\frac{1}{2z\sqrt{1 - z^2}}$ est appelé *coefficient de surtension* ou *facteur de résonance*. Il représente la valeur maximale atteinte par le rapport de l'amplitude de la sortie sur l'amplitude de l'entrée.

⁵Par définition, H_0 est le gain statique

FIG. 2.6 – Diagrammes de Bode pour $z \in \{0,05; 0,1; 0,7; 1; 2\}$.



2.4.2 Première application : moteur à courant continu

Un moteur à courant continu, à aimants permanents, entraîne une charge opposant un couple résistant proportionnel à la vitesse de rotation.

Caractéristiques du moteur et de sa charge :

- coefficient de proportionnalité entre la vitesse angulaire et la f.é.m. de l'induit $K_E = 0,5 \text{ V.rd}^{-1}.s$
- coefficient de proportionnalité entre le courant et le couple $K_C = 0,5 \text{ N.m.A}^{-1}$
- vitesse nominale de rotation $n_N = 1500 \text{ tr.mn}^{-1}$
- résistance de l'induit : $R = 1 \text{ } \Omega$
- courant nominal d'induit $I_N = 8 \text{ A}$
- courant maximal admis $I_{max} = 16 \text{ A}$
- couple nominal $C_N = 4 \text{ N.m}$
- moment d'inertie total ramené à l'axe du moteur $J = 0,01 \text{ kg.m}^2$
- couple résistant de type frottement visqueux : $C_R = f \times \Omega$ avec $f = 12,7 \times 10^{-3} \text{ N.m.rd}^{-1}$
- inductance de l'inducteur $L = 5 \text{ mH}$

On pose

$$k = K_E = K_C$$

On désire connaître la réponse du moteur en vitesse de rotation lorsque son inducteur passe à l'instant $t = 0$ de la tension d'alimentation nulle à la

tension $U_0 = 10 \text{ V}$. Il est intéressant de traiter ce problème d'une manière très générale, puis de situer le système dans l'un des cas généraux.

Résolution de l'équation différentielle

On rappelle l'équation obtenue au §2.1 :

$$\frac{k}{LJ}U(t) = \frac{d^2\Omega}{dt^2} + \left(\frac{f}{J} + \frac{R}{L}\right) \times \frac{d\Omega}{dt} + \left(\frac{k^2 + fR}{LJ}\right) \times \Omega$$

En posant

$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{k^2 + fR}{LJ}} \\ K\omega_0^2 = \frac{k}{LJ} \\ z = \frac{fL + RJ}{2 \times \sqrt{k^2 + fR} \times \sqrt{LJ}} \end{cases}$$

et avec une entrée en échelon $U(t) = U_0$ (pour $t \geq 0$), cette équation prend la forme :

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2} + 2z\omega_0 \frac{d\Omega}{dt} + \omega_0^2\Omega = K\omega_0^2U_0$$

Avec les application numériques proposées, et avec $U_0 = 10 \text{ V}$, on obtient l'équation différentielle :

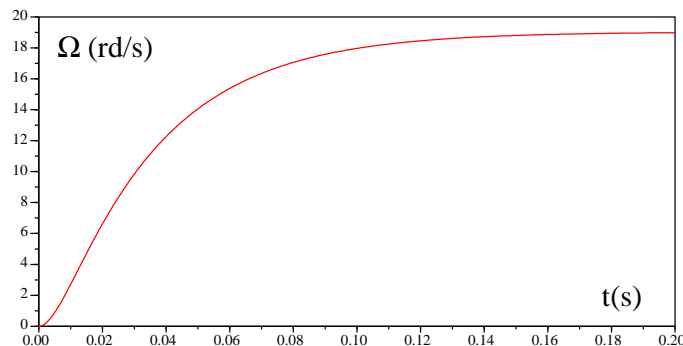
$$100000 = \frac{d^2\Omega}{dt^2} + 201,27 \times \frac{d\Omega}{dt} + 5254 \times \Omega$$

Les paramètres caractéristiques sont :

- $z = 1,388$
- $\omega_0 = 72,48 \text{ rd/s}$

La réponse en vitesse de ce système sera apériodique. Elle est représentée sur la courbe de la figure 2.7

FIG. 2.7 – Réponse du moteur à un échelon $U(t) = 10 \text{ V}$.



Analyse harmonique

La fonction de transfert est :

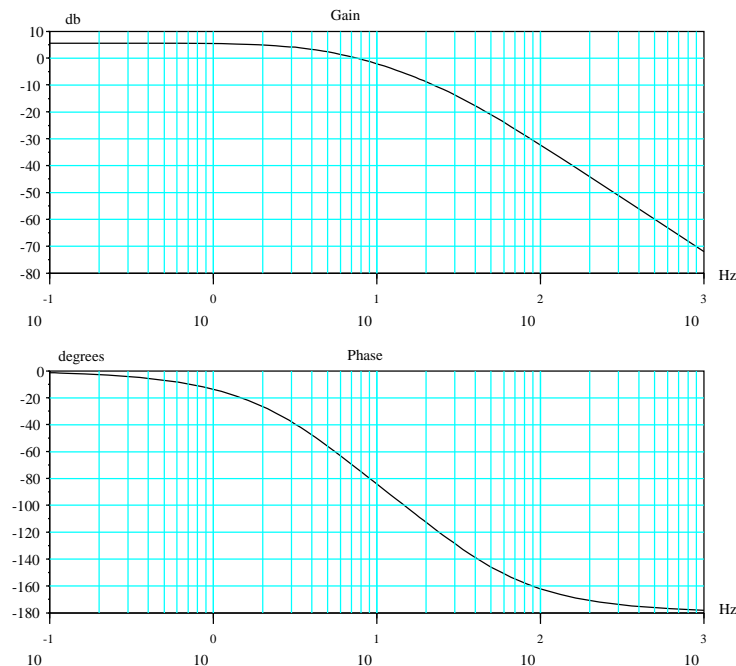
$$H(j\omega) = \frac{\Omega(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}(j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}$$

Avec l'application numérique, on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{1,903}{1 + 0,038 \times (j\omega) + 1,9 \times 10^{-4} \times (j\omega)^2}$$

Le diagramme de Bode correspondant est représenté sur la figure 2.8.

FIG. 2.8 – Diagramme de Bode (entrée $U(t)$ et sortie $\Omega(t)$).



2.4.3 Deuxième application : système mécanique

Considérons le système mécanique constitué d'une masse M , d'un ressort de raideur k et d'un amortisseur de constante f . L'entrée du système est l'effort $F(t)$, sa sortie est la position $y(t)$ de la masse M (figure 2.10).

L'équation différentielle qui régit le fonctionnement de ce système s'obtient en appliquant le principe fondamental de la dynamique en projection sur l'axe vertical. La masse M est soumise à :

- l'effort $F(t)$ entrée du système ;
- l'effort exercé par le ressort sur la masse M qui a pour valeur $-ky(t)$;

- l'effort exercé par l'amortisseur sur M , de valeur $-fy(t)$;
- le poids du système.

En choisissant l'origine de $y(t) = 0$ lorsque le système est en équilibre, on peut faire abstraction du poids qui est pris en compte par la longueur initiale du ressort.

Lorsque le frottement entre deux pièces induit un effort dont le module est proportionnel à la vitesse relative de déplacement entre les deux pièces, on dit que le frottement est *fluide* ou *visqueux*. Si au contraire, le module de l'effort dû au frottement est constant quelque soit la vitesse, alors on dit que le frottement est sec. Par la suite nous nous intéresserons uniquement au frottement fluide représentés sur le schéma par un amortisseur.

Le principe fondamental de la dynamique en projection sur l'axe vertical donne :

$$M \frac{d^2y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky(t) = F(t) \quad (2.5)$$

Cette équation est du second ordre. En posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} K = \frac{1}{k} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \\ z = \frac{f}{2 \times \sqrt{kM}} \end{array} \right.$$

on retrouve l'expression standard :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2z\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = K\omega_0^2 F(t)$$

Étudions la réponse harmonique de ce système, en prenant une entrée de la forme $F(t) = F_0 \sin \omega t$.

Si le mécanisme, composé d'une masse, d'un ressort et d'un amortisseur est tel que le coefficient z est voisin de 0,707, pour des pulsations ω très inférieures à la pulsation ω_0 du système, l'amplitude du signal de sortie est proportionnelle au signal d'entrée. Il existe donc une plage de pulsations telles que ce mécanisme puisse être utilisé en tant que capteur d'effort (figure 2.9).

Si la pulsation ω est très grande devant ω_0 alors le module de la sortie décroît de manière linéaire en fonction du logarithme de la pulsation ω de $F(t)$. Dans ce cas, le mécanisme permet de mesurer la valeur de la pulsation de l'effort (figure 2.9).

Si nous cherchons maintenant à obtenir une résonance bien marquée du système, la valeur de z doit être aussi faible que possible. Il suffira alors d'exiter l'entrée du système au moyen d'un effort sinusoïdal de faible module pour voir la masse M osciller dès que ω et ω_R deviennent voisins.

FIG. 2.9 – Diagramme de bode (entrée $F(t)$ et sortie $y(t)$).

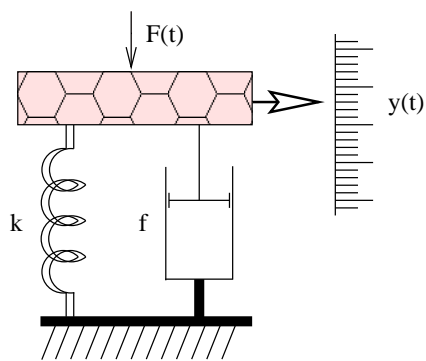
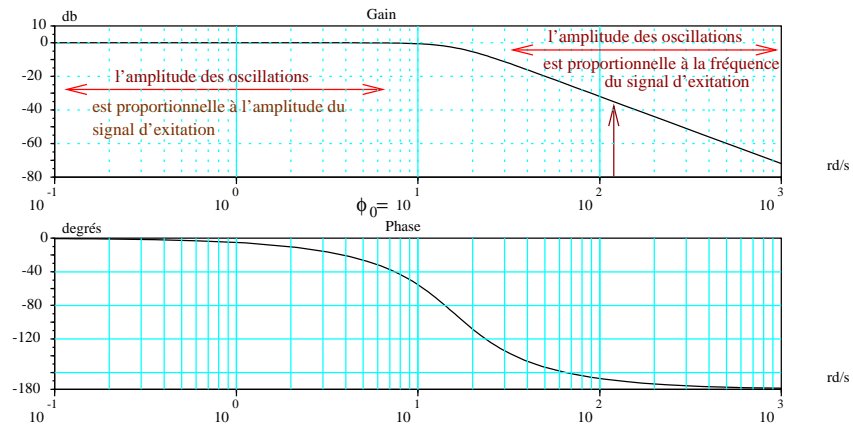


FIG. 2.10 – Système mécanique d'entrée $F(t)$ et de sortie $y(t)$.

Chapitre 3

Fonction de transfert

3.1 Généralités

La transmittance isochrone d'un système linéaire peut se mettre sous la forme :

$$H(j\omega) = \frac{b_0 + b_1 \times (j\omega) + b_2 \times (j\omega)^2 + \dots + b_m \times (j\omega)^m}{a_0 + a_1 \times (j\omega) + a_2 \times (j\omega)^2 + \dots + a_n \times (j\omega)^n}$$

D'autre part, on a vu que les coefficients intervenant dans cette transmittance sont les mêmes que ceux qui caractérisent l'équation de la réponse du système (solution de l'équation différentielle). Cette remarque a pour conséquence qu'il y a deux approches possibles lors de l'étude d'un système :

1. résoudre l'équation différentielle ;
2. étudier les propriétés de la transmittance et en déduire le comportement du système.

Dans la pratique c'est cette deuxième solution qui est retenue. L'étude des systèmes est alors liée aux propriétés des fractions rationnelles de $\mathbb{R}[X]$. En effet, si on pose $X = j\omega$, la transmittance $H(j\omega)$ est identique à une fraction rationnelle $F(X)$ de $\mathbb{R}[X]$:

$$F(X) = \frac{b_0 + b_1 \times X + b_2 \times X^2 + \dots + b_m \times X^m}{a_0 + a_1 \times X + a_2 \times X^2 + \dots + a_n \times X^n} = \frac{N(X)}{D(X)}$$

Or, on sait qu'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ peut se mettre sous la forme d'un produit de facteurs de polynômes de degré 1 de $\mathbb{R}[X]$ et de polynômes de degré 2 de $\mathbb{R}[X]$. On rappelle le théorème vu en cours de mathématiques : Soit \mathcal{P}_2 l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ du second degré, unitaires et à discriminant strictement négatif¹.

Théorème 1 *A tout polynôme non nul P de $\mathbb{R}[X]$, on peut associer un, et un seul triplet constitué d'un élément non nul a de \mathbb{R} et de deux applications*

¹Il s'agit donc des polynômes de la forme $Q(X) = X^2 - 2\Re(x)X + |x|^2$, où x est un nombre complexe non réel.

presque nulles $\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$, $\mu : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{N}$, tel que

$$P = a \prod_{x \in \mathbb{R}} (X - x)^{\nu(x)} \prod_{Q \in \mathcal{P}_2} Q^{\mu(x)} \quad (3.1)$$

On dit que (3.1) est la décomposition de Gauss² du polynôme P .

$\nu(x)$ et $\mu(Q)$ sont les ordres de multiplicité respectifs de $(X - x)$ et Q .

En appliquant ce théorème au numérateur et au dénominateur de $F(X)$, on obtient :

$$F(X) = \frac{A_0}{B_0} \times \frac{\prod_{i=1}^{n'} (1 + \tau_{1i} X) \prod_{j=1}^{n''} \left(1 + \frac{2z_{1j}}{\omega_{1j}} X + \frac{X^2}{\omega_{1j}^2}\right)}{\prod_{k=1}^{m'} (1 + \tau_{2k} X) \prod_{\ell=1}^{m''} \left(1 + \frac{2z_{2\ell}}{\omega_{2\ell}} X + \frac{X^2}{\omega_{2\ell}^2}\right)} \quad (3.2)$$

avec $n = n' + n''$ et $m = m' + m''$. Les polynômes du second degré sont supposés irréductibles dans \mathbb{R} .

La fonction de transfert $H(j\omega)$ peut donc être mise sous la forme d'un produit de fonctions de transfert élémentaires prises dans l'un des cas suivants :

$$H_0(j\omega) = K \text{ (constante)} \quad (3.3)$$

$$H_1(j\omega) = 1 + \tau_1 j\omega \quad (3.4)$$

$$H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + \tau_2 j\omega} \quad (3.5)$$

$$H_3(j\omega) = 1 + \frac{2z_1}{\omega_1} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_1^2} \quad (3.6)$$

$$H_4(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2z_2}{\omega_2} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_2^2}} \quad (3.7)$$

La représentation de Bode effectuant de manière naturelle la transformation de produit en somme (propriété du logarithme), on en conclut que la transformation de $H(j\omega)$ en produit de facteurs irréductibles permet de tracer très simplement son diagramme de Bode.

3.2 Diagrammes de Bode des fonctions élémentaires

3.2.1 Formes $H_1(j\omega)$ et $H_3(j\omega)$

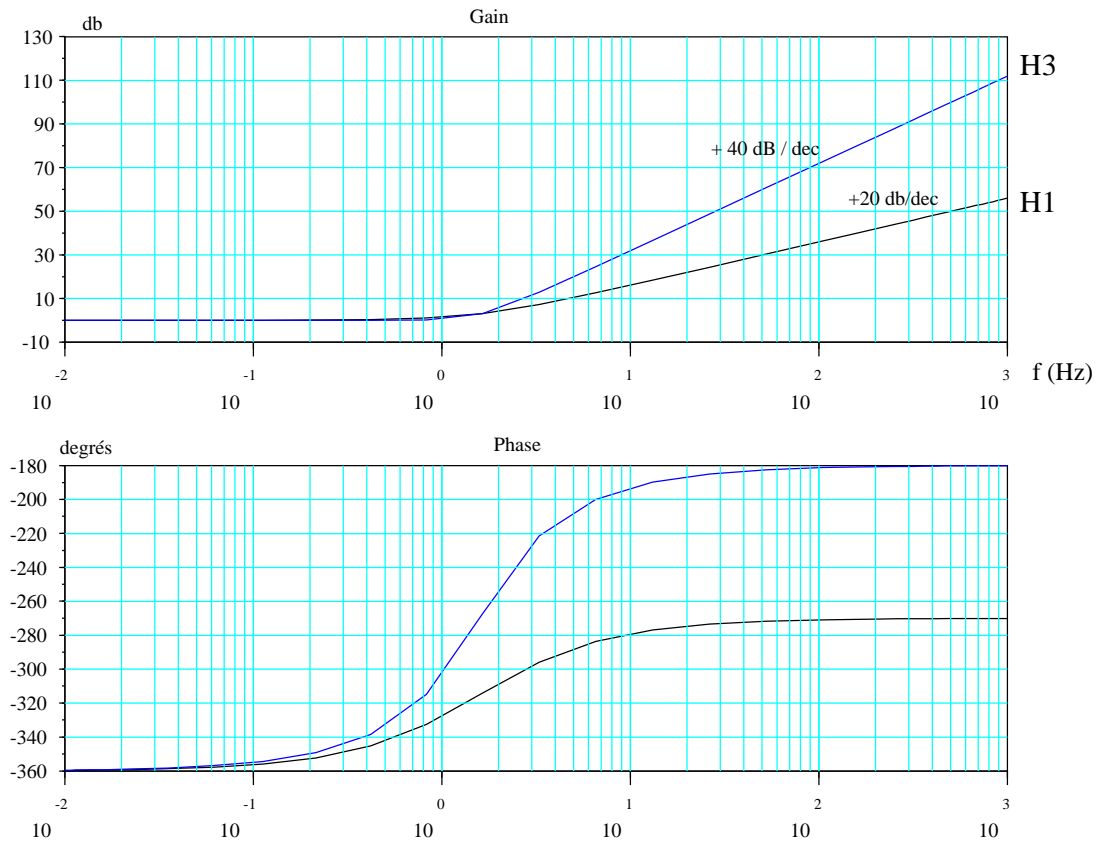
Les pentes des courbes de gain sont positives. Pour le premier ordre,

1. l'asymptote coupe l'axe des abscisses au point $f_0 = \frac{1}{2\pi\tau}$;

²Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ étant les polynômes de degré 1, et les polynômes de degré 2, il est souvent commode de calculer d'abord la décomposition de d'Alembert dans \mathbb{C} et de grouper les racines imaginaires conjuguées

2. la pente de l'asymptote de la courbe de gain est +20 dB/décade ;
- Quant au second ordre,
1. l'asymptote coupe l'axe des abscisses au point $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$;
 2. la pente de l'asymptote de la courbe de gain est +40 dB/décade ;

FIG. 3.1 –



3.2.2 Formes $H_2(j\omega)$ et $H_4(j\omega)$

Les pentes des courbes de gain sont négatives. Pour le premier ordre,

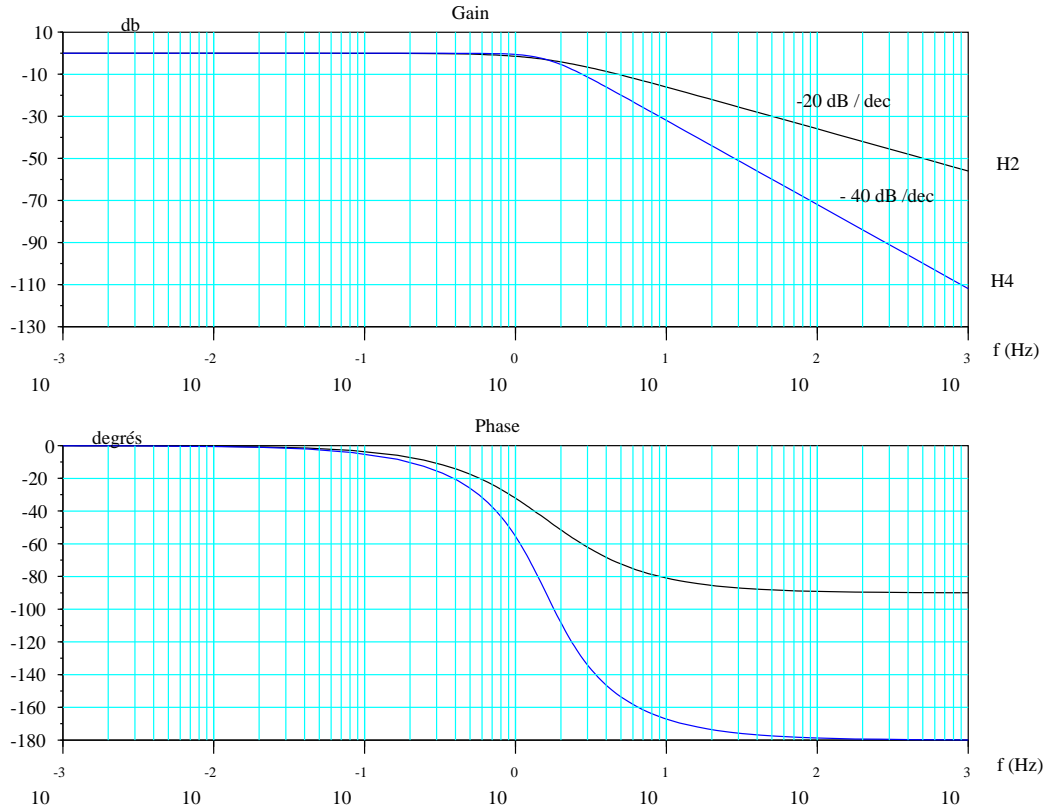
1. l'asymptote coupe l'axe des abscisses au point $f_0 = \frac{1}{2\pi\tau}$;
2. la pente de l'asymptote de la courbe de gain est -20 dB/décade ;

Quant au second ordre,

1. l'asymptote coupe l'axe des abscisses au point $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$;
2. la pente de l'asymptote de la courbe de gain est -40 dB/décade ;

Concernant les diagrammes asymptotiques, il existe une relation entre le diagramme de gain et le diagramme de phase : une pente de -20 dB / déc

FIG. 3.2 –



correspond à un déphasage de -90 degrés, et une pente de -40 dB /déc correspond à un déphasage de -180 degrés. Plus généralement, pour une pente de $-n \times 20$ dB/déc, le déphasage sera de $-n \times 90$ degrés.

3.3 Applications

Exercice 1

Tracer les diagrammes de Bode des transmittances :

$$G_1(j\omega) = \frac{K(j\omega + 7)}{j\omega(j\omega + 1)(j\omega + 4)(j\omega + 5)} \quad (3.8)$$

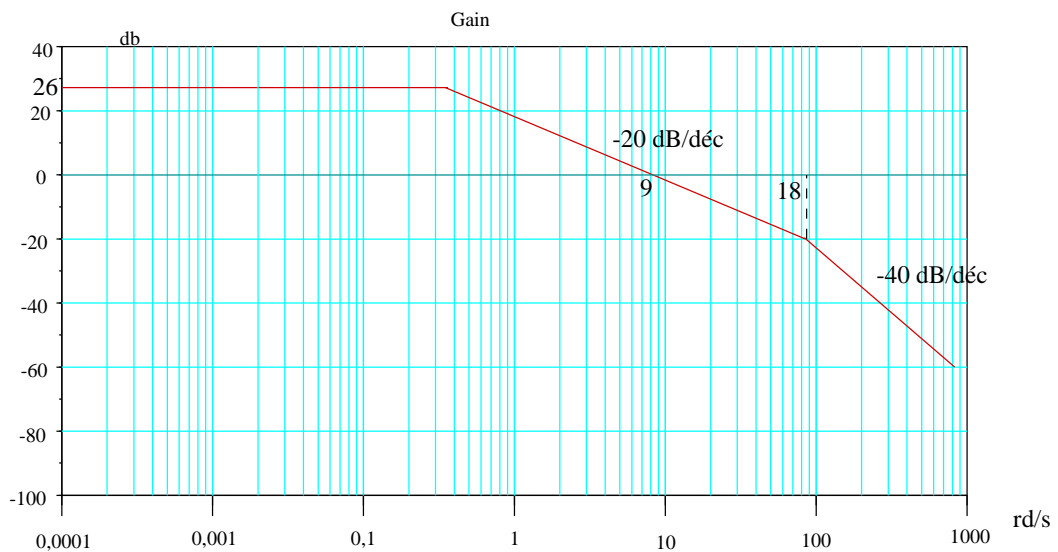
$$G_2(j\omega) = \frac{5,8}{j\omega} \times \frac{1 + 0,85j\omega}{(1 + 0,48j\omega)(1 + 0,27j\omega)} \quad (3.9)$$

$$G_3(j\omega) = \frac{1 + 0,5j\omega}{p^2} \quad (3.10)$$

Exercice 2

Donner l'expression des transmittances dont les diagrammes asymptotiques sont donnés dans la figure 3.3 en coordonnées de Bode. Les systèmes étudiés sont à déphasage minimal³.

FIG. 3.3 – Exercice 2(a)



Exercice 3

Le schéma fonctionnel d'un asservissement électro-hydraulique est donné sur la figure 3.6

Les fonctions de transfert de l'amplificateur et de la servo-valve sont assimilables à des constantes K_1 et K_2 . L'ensemble vérin + charge est défini par les équations suivantes :

$$\text{Équation de débit : } Q = S \frac{dz}{dt} + K_0 \frac{d(P_A - P_B)}{dt}$$

$$\text{Équation des forces : } (P_A - P_B)S = r_c z + f \frac{dz}{dt} + m \frac{d^2 z}{dt^2}$$

avec :

Q débit fourni au vérin ;

S section du vérin ;

P_A, P_B pressions dans les deux chambres du vérin ;

r_c raideur de l'élément essayé ;

f frottement visqueux de l'ensemble mobile ;

m masse de l'ensemble mobile ;

³C'est à dire qu'il ne comportent ni retard pur, ni déphaseur pur. La relation vue auparavant entre la courbe de gain et la courbe de phase est donc vérifiée.

FIG. 3.4 – Exercice 2(b)

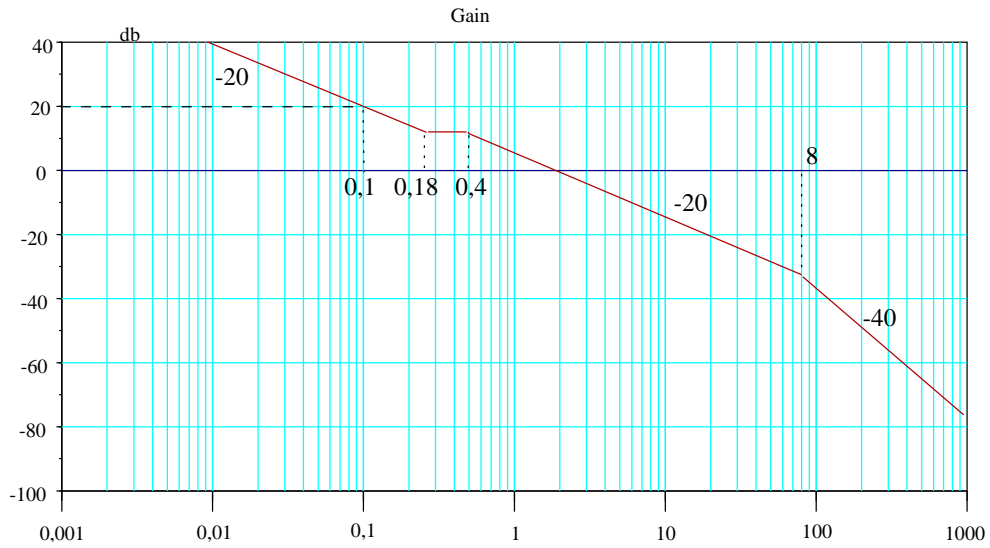
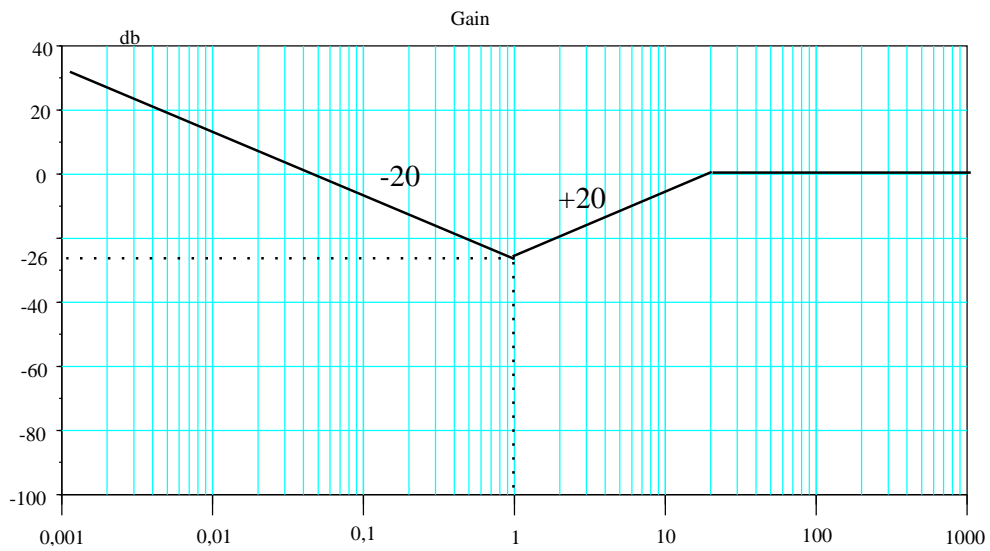


FIG. 3.5 – Exercice 2(c)



z position de l'ensemble mobile par rapport au bâti.

La grandeur de sortie est la position z et la fonction de transfert du capteur de position est assimilable à une constante K_3 . Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte $\frac{y_1(j\omega)}{\epsilon(j\omega)}$

FIG. 3.6 – Exercice 3(a)

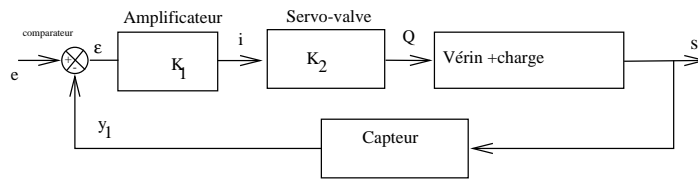
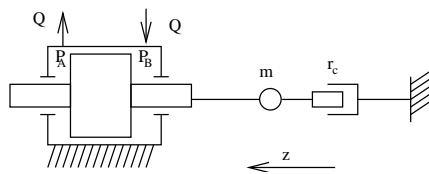


FIG. 3.7 – Exercice 3(b)



Chapitre 4

Systèmes asservis linéaires

4.1 Définition d'un système asservi

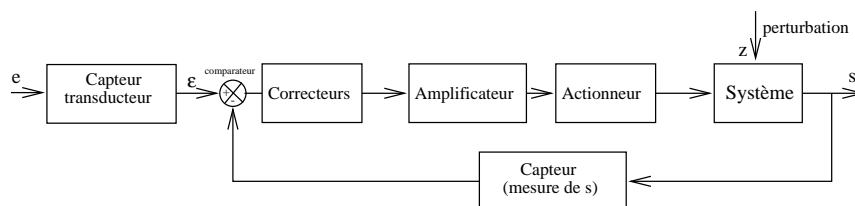
4.1.1 Définition

Un *système asservi* est un système de commande en boucle fermée avec amplification de puissance, l'énergie disponible à la sortie étant fournie par une source d'énergie (amplificateur de puissance) modulée par les signaux de commande.

4.1.2 Éléments constitutifs

Le schéma fonctionnel relatif à un système asservi monovariante (figure 4.1) met en évidence les éléments fondamentaux d'un tel système sur lequel agissent une grandeur d'entrée et une perturbation se situant à un niveau quelconque.

FIG. 4.1 –



Capteur. Un capteur permet de mesurer une grandeur physique en la convertissant en une autre grandeur physique plus commode pour le traitement ultérieur de cette information. Très fréquemment, la grandeur de sortie du capteur sera une grandeur électrique, courant ou tension. Exemples :

les **capteurs de position** tels que le potentiomètre, ...

les **capteurs de vitesse** tels que la dynamo tachymétrique ;

les **capteurs d'accélération** , de pressions, de températures, de niveaux, ...

Comparateur ou détecteur d'écart. Un comparateur permet de comparer les grandeurs physiques images des grandeurs d'entrée et de sortie. La façon la plus simple de faire cette comparaison consiste à effectuer la différence entre ces deux grandeurs. Un amplificateur différentiel, ou un montage soustracteur à base d'amplificateurs opérationnels peuvent réaliser cette fonction ¹.

Correcteurs. Ces organes, dont l'étude constitue un chapitre de ce cours, servent à élaborer, à partir de la différence entre les mesures d'entrée et de sortie, un ordre de commande permettant de concilier les exigences généralement contradictoires de précision et de stabilité².

Amplificateur. Un amplificateur est destiné à transformer la commande à faible niveau d'énergie issue du détecteur d'écart en un signal de commande à niveau d'énergie plus élevé susceptible de commander un moteur, une vanne, un vérin, ...

L'amplificateur est alimenté par une source d'énergie externe nonreprésentée sur le schéma fonctionnel et son signal de commande sert à régler la fraction de cette énergie que l'on admet à la sortie. Citons par exemple :

- les amplificateurs électroniques à thyristors ;
- les groupes Ward-Léonard ;
- les distributeurs hydrauliques.

Actionneur de système à régler. L'actionneur est un organe de puissance pouvant modifier la grandeur de sortie du système à régler. Le type d'actionneur dépend de la nature du système et de la grandeur à régler. Il en existe une très grande variété :

- moteurs électriques, hydrauliques, thermiques, pour commander une vitesse, une position, un couple, ...
- vanne à débit réglable pour commander un débit, un niveau, la concentration d'un mélange, les calories fournies par un brûleur, ...

4.2 Asservissement et régulation

Fonction asservissement. La grandeur d'entrée principale est $e(t)$ et le système bouclé est conçu pour que la grandeur de sortie suive les évolutions définies par la grandeur d'entrée.

¹On réalise également des comparateurs à l'aide de dispositifs mécaniques, pneumatiques, hydrauliques, ...

²Tous les systèmes asservis n'ont pas de correcteurs

Fonction régulation. La grandeur d'entrée $e(t)$ reste constante. Elle est fixée à une valeur appelée *valeur de consigne*. Le système a pour fonction principale de maintenir la grandeur de sortie constante malgré les perturbations.

4.3 Classification des systèmes asservis

On peut distinguer :

les systèmes continus et les systèmes discrets. Dans un système continu, les grandeurs caractérisant ce système sont connues à tout instant alors que dans un système discret, une grandeur au moins n'est connue que pour certaines valeurs du temps (pour $x = nT$ avec $n \in \mathbb{N}$)
Dès l'instant où un ordinateur numérique intervient dans la boucle, on a affaire à cette catégorie. L'étude des systèmes échantillonnés est un domaine faisant appel à des modèles et à des techniques de calculs particuliers.

Les systèmes linéaires ou non linéaires. Dans un système linéaire on peut appliquer le principe de superposition.

$$\begin{aligned} \forall i \in [0, N] \quad e_i(t) &\mapsto s_i(t) \\ \Rightarrow \sum_{i=0}^N \alpha_i e_i(t) &\mapsto \sum_{i=0}^N \alpha_i s_i(t) \end{aligned}$$

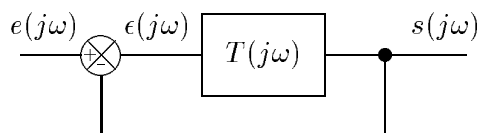
Les systèmes **non linéaires** sont de type très variés. On distingue d'une part, les systèmes continus décrits par des équations différentielles non linéaires, et d'autre part, des systèmes ayant une partie linéaire et une partie non linéaire comme un relais, un seuil, un cycle d'hystérésis, ...

Les systèmes variants ou invariants. Un système variant est tel que l'équation qui le décrit a des coefficients fonction du temps alors que ces coefficients sont constants pour un système invariant.

4.4 Fonctions de transfert d'un système bouclé

4.4.1 Système à retour unitaire

Un système est dit à retour unitaire si son schéma fonctionnel se met sous la forme suivante :



La fonction de transfert $H(j\omega)$ du système bouclé est telle que :

$$s(j\omega) = H(j\omega) \times e(j\omega)$$

On peut l'exprimer en fonction de $T(j\omega)$. En effet,

$$\begin{cases} s(j\omega) = T(j\omega)\epsilon(j\omega) \\ \epsilon(j\omega) = e(j\omega) - s(j\omega) \end{cases}$$

donne :

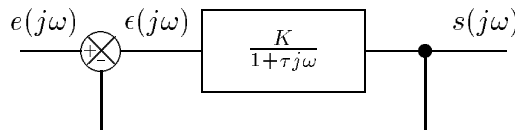
$$s(j\omega) = \frac{T(j\omega)}{1 + T(j\omega)} \times e(j\omega)$$

d'où :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{T(j\omega)}{1 + T(j\omega)}} \quad (4.1)$$

Système du premier ordre

Considérons le système asservi dont le schéma fonctionnel est :



De la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) $T(j\omega)$, on déduit la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) $H(j\omega)$:

$$H(j\omega) = \frac{T(j\omega)}{1 + T(j\omega)} = \frac{\frac{K}{1 + \tau j\omega}}{1 + \frac{K}{1 + \tau j\omega}}$$

Soit,

$$H(j\omega) = \frac{\frac{K}{K+1}}{1 + \frac{\tau}{K+1}j\omega}$$

Le système bouclé reste un système du premier ordre avec :

- un gain statique $K' = \frac{K}{K+1}$
- une constante de temps $\tau' = \frac{\tau}{K+1}$

Exercice 4

Montrer qu'un système à retour unitaire dont la chaîne directe est un système du second ordre caractérisé par K , ω_0 et z reste un système du second ordre. Exprimer les paramètres K' , ω'_0 et z' . En prenant

$$\omega_0 = 1 \text{ rd/s}, z = 1 \text{ et } K = 2,$$

représentez sur un même graphique les réponses du système en boucle ouverte et du système en boucle fermée.

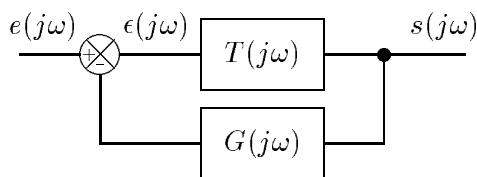


FIG. 4.2 – *Système à retour non unitaire*

4.4.2 Système à retour non unitaire

Il s'agit des systèmes comprenant dans leur schéma fonctionnel un élément de schéma comme celui de la figure 4.2 La fonction de transfert $H(j\omega)$ du système bouclé est telle que :

$$s(j\omega) = H(j\omega) \times e(j\omega)$$

On peut l'exprimer en fonction de $T(j\omega)$ et de $G(j\omega)$. En effet,

$$\begin{cases} s(j\omega) &= T(j\omega)\epsilon(j\omega) \\ \epsilon(j\omega) &= e(j\omega) - G(j\omega) \times s(j\omega) \end{cases}$$

$$\Rightarrow s(j\omega) = T(j\omega)(e(j\omega) - G(j\omega) \times s(j\omega))$$

$$s(j\omega) = \frac{T(j\omega)}{1 + T(j\omega)G(j\omega)} \times e(j\omega)$$

d'où :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{T(j\omega)}{1 + T(j\omega)G(j\omega)}} \quad (4.2)$$

Remarque :

On peut toujours transformer (théoriquement) un système à retour non unitaire en système à retour unitaire. En effet,

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{T(j\omega)}{1 + T(j\omega)G(j\omega)} \\ &= \frac{T(j\omega)G(j\omega)}{1 + T(j\omega)G(j\omega)} \times \frac{1}{G(j\omega)} \end{aligned}$$

Ce qui correspond au diagramme fonctionnel transformé de la figure 4.3 :

Exercice 5

Un enregistreur à servo-mécanisme est conforme au schéma de la figure 4.4

e en Volts est la tension à enregistrer ;

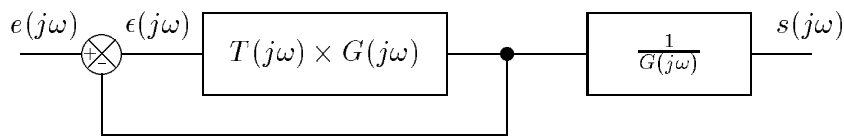


FIG. 4.3 – Retour non unitaire, transformé.

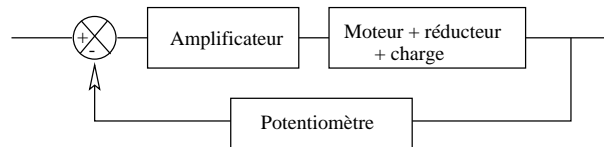


FIG. 4.4 – Exercice 5

S en radians est la position de la sortie de l'enregistreur.

L'amplificateur de gain K_1 commande l'induit du moteur.

Le moteur à courant continu à excitation constante attaque l'arbre de sortie par l'intermédiaire d'un réducteur de vitesse de rapport $\frac{S}{\theta} = \frac{1}{n}$ avec θ en radians définissant la position de l'arbre moteur.

Notations :

R et L : résistance et inductance de l'induit ;

$K_2 i$: couple moteur, i étant le courant d'induit ;

J_m, f_m : moment d'inertie et coefficient de frottement visqueux de l'arbre moteur ;

J_s, f_s : *idem* pour l'arbre de sortie ;

K_3 : coefficient du potentiomètre (en V/rd).

Faire le schéma fonctionnel détaillé du système dans lequel on fera apparaître une perturbation, couple Z appliqué sur l'arbre de sortie et calculer la fonction de transfert $\frac{S(j\omega)}{Z(j\omega)}$

Exercice 6

Donner, pour chacun des schémas blocs suivants la relation existant entre e et s .

Exercice 7

Un groupe WARD LEONARD est conforme au schéma de la figure 4.7. Un moteur asynchrone entraîne le rotor d'une génératrice. La force électromotrice de la génératrice est proportionnelle au courant parcourant son circuit inducteur :

$$U_e = K_1 I_e$$

La tension U_e aux bornes de l'induit de la génératrice commande le circuit induit d'un moteur à courant continu. Le couple moteur est proportionnel

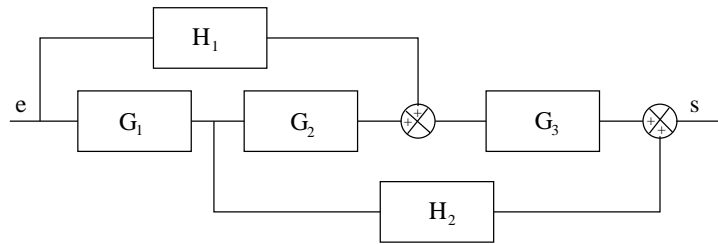


FIG. 4.5 – Exercice 6(a)

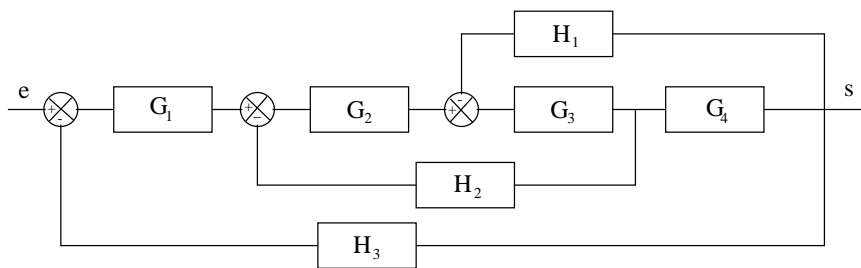


FIG. 4.6 – Exercice 6(b)

au courant.

$$C = K_2 i$$

La force contre électromotrice E du moteur est proportionnelle à sa vitesse.

$$E = K_3 \frac{d\theta_m}{dt}$$

Le moteur entraîne une charge de moment d'inertie J_c par l'intermédiaire d'un réducteur de rapport de réduction $n = \frac{\theta_m}{\theta_s}$.

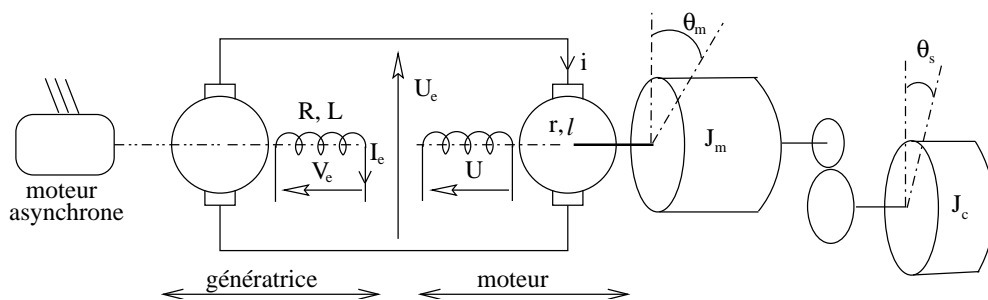


FIG. 4.7 – Groupe WARD LEONARD (Exercice 7)

On appelle R et L la résistance et l'inductance du circuit inducteur de la génératrice. De même, r et l sont la résistance et l'inductance du circuit induit du moteur.

La grandeur d'entrée étant la tension V_e aux bornes de l'inducteur de la génératrice, et la grandeur de sortie la position θ_s :

- Exprimer J , moment d'inertie équivalent, en fonction de J_m , moment d'inertie de l'arbre moteur, et de J_c , moment d'inertie de la charge.
- Exprimer de même f , coefficient des frottements fluides en fonction de f_m et de f_c .
- Écrire les équations de tous les éléments.
- En déduire le schéma fonctionnel du système.

Application numérique :

$R = 50 \Omega$, $L = 50 \text{ mH}$, $K_1 = 500 \text{ V/A}$, $r = 10 \Omega$, $\ell = 10 \text{ mH}$,
 $K_3 = 1 \text{ V/rd/s}$, $K_2 = 1 \text{ mN/A}$, $J = 0,01 \text{ kg.m}^2$, $f \simeq 0$, $n = 10$.

- Montrer que le schéma fonctionnel peut se mettre sous la forme de celui de la figure 4.8

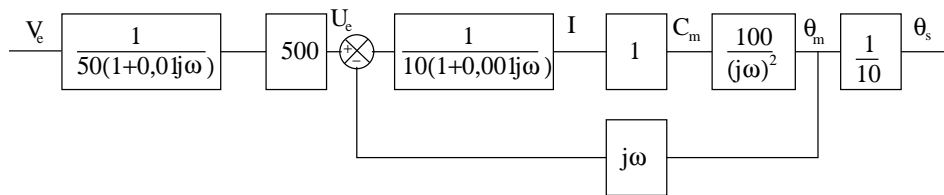


FIG. 4.8 – Schéma fonctionnel (Exercice 7)

Chapitre 5

Stabilité des systèmes asservis

Un système physique est stable s'il retourne spontanément vers son état d'équilibre lorsqu'il en est écarté.

5.1 Condition de stabilité

On rappelle qu'à un système décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$a_0 y + a_1 \times \frac{dy}{dt} + \dots + a_n \times \frac{d^n y}{dt^n} = b_0 x + b_1 \times \frac{dx}{dt} + \dots + b_m \times \frac{d^m x}{dt^m}$$

correspond à une transmittance :

$$H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{b_0 + b_1 \times (j\omega) + \dots + b_m \times (j\omega)^m}{a_0 + a_1 \times (j\omega) + \dots + a_n \times (j\omega)^n}$$

Cette fraction rationnelle d'indéterminée $j\omega$ se décompose en éléments simples dans \mathbb{C} :

$$H(j\omega) = \frac{A_1}{j\omega - \lambda_1} + \frac{A_2}{j\omega - \lambda_2} + \dots + \frac{A_n}{j\omega - \lambda_n}$$

Supposons que les conditions initiales soient nulles, et que l'entrée à laquelle est soumis le système est un échelon :

$$e(t) = E_0 \quad (t > 0)$$

La sortie $s(j\omega)$ s'exprime en fonction de $e(j\omega)$ grâce à la transmittance isochrone :

$$s(j\omega) = H(j\omega) \times e(j\omega) = \left(\frac{A_1}{j\omega - \lambda_1} + \frac{A_2}{j\omega - \lambda_2} + \dots + \frac{A_n}{j\omega - \lambda_n} \right) \times e(j\omega)$$

ou les λ_i sont les racines (ou *zéros*) de $D(j\omega)$ ¹. On en déduit l'expression isochrone de la sortie :

$$s(j\omega) = \frac{A_1 \times e(j\omega)}{j\omega - \lambda_1} + \frac{A_2 \times e(j\omega)}{j\omega - \lambda_2} + \dots + \frac{A_n \times e(j\omega)}{j\omega - \lambda_n}$$

¹On dit également que les λ_i sont les *pôles* de $H(j\omega)$

Nous avons vu plus haut que les racines λ_i sont, soit réelles ($\lambda_i = \alpha_i$) ou sinon, elles peuvent être regroupées par paires de complexes non réels conjugués ($\lambda_k = \beta_k$) :

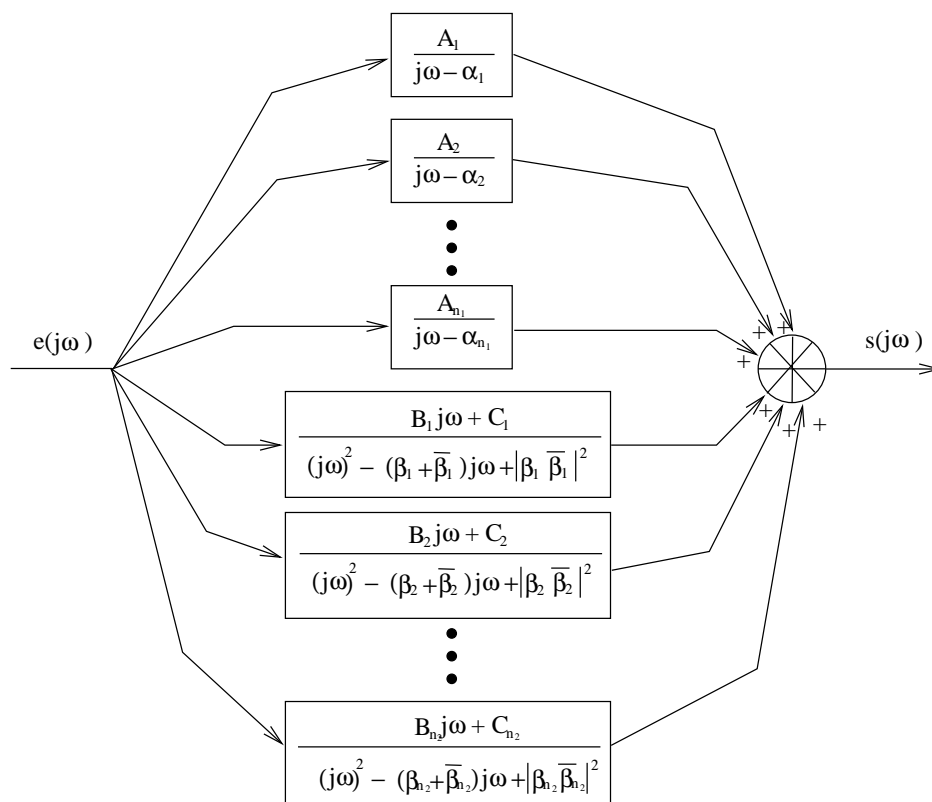


FIG. 5.1 – Décomposition de la transmittance isochrone

$$s(j\omega) = \sum_{i=1}^{i=n_1} \frac{A_i \times e(j\omega)}{j\omega - \alpha_i} + \sum_{k=1}^{k=n_2} \frac{(B_k j\omega + C_k) \times e(j\omega)}{(j\omega)^2 - (\beta_k + \overline{\beta_k})j\omega + |\beta_k \overline{\beta_k}|^2}$$

$$(n = n_1 + 2 \times n_2)$$

D'autre part, compte tenu de la propriété de linéarité, on peut dire que la sortie $s(t)$ est la somme des réponses à $e(t)$ des $n_1 + n_2$ systèmes abstraits issus de la décomposition précédente. La figure 5.1 montre sous forme de schéma bloc, la décomposition fonctionnelle qui résulte de la décomposition de la fraction rationnelle d'intégrée $j\omega$.

En posant

$$\beta_k = b_k + j\omega_k \text{ et } \overline{\beta_k} = b_k - j\omega_k$$

La solution s'exprimera alors par :

$$s(t) = \sum_{i=1}^{i=n_1} A_i E_0 e^{\alpha_i t} + \sum_{k=1}^{k=n_2} D_k E_0 e^{b_k t} \sin(\omega_k t + \phi) + S_0$$

La sortie $s(t)$ trouvera une position d'équilibre si toutes les exponentielles de la solution générale tentent vers 0, c'est à dire si les solutions réelles sont négatives, et si les parties réelles des solutions complexes sont également négatives. D'une manière générale,

Un système de transmittance $H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$ est stable si la partie réelle de tous les zéros (dans $\mathbb{C}[j\omega]$) de $D(j\omega)$ est strictement négative .

Cette condition est nécessaire et suffisante.

Cependant, sa traduction directe est généralement difficile :

- soit parce que la transmittance est connue expérimentalement,
- soit parce que mathématiquement, la recherche des pôles est inextricable.

On emploie des critères permettant de vérifier si cette condition est satisfaite sans avoir à calculer les pôles de la fonction de transfert.

5.2 Critère de ROUTH

On se bornera à indiquer sans justification les règles d'application de ce critère.

5.2.1 Énoncé du critère

Soit un système de transmittance :

$$H(j\omega) = \frac{b_0 + b_1 \times (j\omega) + b_2 \times (j\omega)^2 + \dots + b_m \times (j\omega)^m}{a_0 + a_1 \times (j\omega) + a_2 \times (j\omega)^2 + \dots + a_n \times (j\omega)^n}$$

Condition nécessaire et suffisante de stabilité : il faut et il suffit, pour que le système soit stable, que les racines dans $\mathbb{C}[j\omega]$ de

$$a_0 + a_1 \times (j\omega) + a_2 \times (j\omega)^2 + \dots + a_n \times (j\omega)^n = 0$$

aient leurs parties réelles strictement négatives.

Traduction par le critère de ROUTH : il faut et il suffit :

1. que tous les coefficients $a_i (i \leq n)$ soient **présents** et de **même signe**,
2. que tous les termes de la 1^{ère} colonne du tableau ci dessous soient **positifs** :

$(j\omega)^n$	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
$(j\omega)^{n-1}$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
$(j\omega)^{n-2}$	c_n	c_{n-2}	c_{n-4}	\dots
$(j\omega)^{n-3}$	c_{n-1}	c_{n-3}	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$(j\omega)^{n-i}$	d_n	d_{n-2}	d_{n-4}	\dots

$i \in \{0, \dots, n\}$

Les coefficients successifs sont formés comme indiqué ci dessous :

$$c_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \qquad c_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_{n-1} = \frac{c_n a_{n-3} - a_{n-1} c_{n-2}}{c_n} \qquad c_{n-3} = \frac{c_n a_{n-5} - a_{n-1} c_{n-4}}{c_n}$$

On reproduit le procédé de calcul pour les lignes suivantes, chaque ligne étant obtenue à partir des 2 lignes précédentes. Il faut continuer jusqu'à ce que tous les coefficients d'une même ligne soient nuls.

5.2.2 Exemple

Recherchons la condition de stabilité pour un système dont le dénominateur de la transmittance est :

$$D(j\omega) = (j\omega)^4 + 8(j\omega)^3 + 17(j\omega)^2 + (k + 30)j\omega + k$$

L'équation caractéristique est :

$$(j\omega)^4 + 8(j\omega)^3 + 17(j\omega)^2 + (k + 30)j\omega + k = 0$$

Tous les coefficients de $D(j\omega)$ sont présents et de même signe : la première condition est vérifiée. Pour vérifier la seconde condition, il faut construire le tableau de ROUTH :

$(j\omega)^4$	1	17	k
$(j\omega)^3$	8	$k + 30$	0
$(j\omega)^2$	$17 - \frac{k+30}{8}$	k	0
$(j\omega)$	$k + 30 - \frac{8k}{17 - \frac{k+30}{8}}$	0	0
$(j\omega)^0$	k	0	0

On en tire les conditions suivantes sur la variable k :

$$\begin{cases} 17 - \frac{k+30}{8} > 0 \\ k + 30 - \frac{8k}{17 - \frac{k+30}{8}} > 0 \\ k > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k < 106 \\ k < 63 \\ k > 0 \end{cases}$$

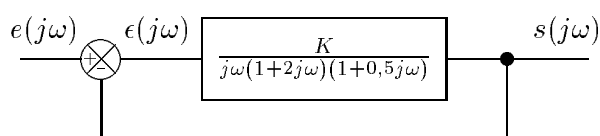
La condition de stabilité est donc $0 < k < 63$.

5.2.3 Inconvénients du critère de ROUTH

- Il exige la connaissance algébrique de la transmittance.
- Son emploi peut s'avérer difficile lorsque les conditions algébriques sont «lourdes». (Il convient dans ce cas de faire appel à un logiciel de calcul formel . . .)
- Il ne donne aucune indication sur la marge de stabilité.

Exercice 8

Un système asservi est conforme au schéma bloc suivant :



Déterminer par le critère de ROUTH la valeur limite de K pour laquelle le système est stable.

Exercice 9

À l'aide du critère de ROUTH déterminer si les systèmes dont les équations caractéristiques sont données ci dessous sont stables

- $5(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 6j\omega + 2 = 0$
- $0,3(j\omega)^5 + 2,6(j\omega)^4 + 6,9(j\omega)^3 + 9,5(j\omega)^2 + 10,3j\omega + 4,6 = 0$

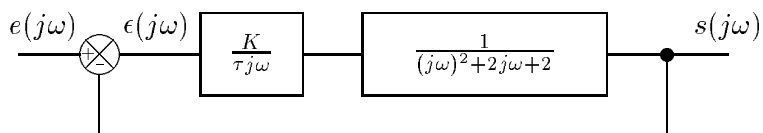
Exercice 10

Étudier par le critère de ROUTH la stabilité des systèmes dont les fonctions de transfert en boucle fermée sont données par :

- $\frac{1}{(j\omega)^5 + (j\omega)^4 - (j\omega)^3 + (j\omega)^2 + j\omega + 1}$
- $\frac{1}{(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 11j\omega + 6}$

Exercice 11

On considère un système asservi corrigé composé de deux blocs :



Le premier bloc $\frac{K}{\tau j\omega}$ est paramétrable afin de s'adapter à différentes configurations. Le second bloc $\frac{1}{(j\omega)^2 + 2j\omega + 2}$ est le processus à commander. Donner une relation entre K et τ qui garantira la stabilité d'un tel système.

5.3 Critère du revers

5.3.1 Introduction

Soit un système asservi de transmittance isochrone en boucle ouverte $T(j\omega)$. Pour qu'il soit stable, il faut et il suffit que tous les pôles de la transmittance en boucle fermée ait une partie réelle strictement négative. Dans le cas d'un système stable en boucle ouverte et à *déphasage minimal*², on peut appliquer un critère simplifié de stabilité obtenu en transposant sous forme graphique la condition de signe des pôles dans le plan complexe (plan de NYQUIST). Ce critère dit *du revers* est applicable à la grande majorité des systèmes asservis usuels. L'intérêt du critère du revers est l'étude de la stabilité d'un système en boucle fermée, en analysant le comportement du système en boucle ouverte.

5.3.2 Transformation conforme

L'étude de la transmittance en boucle ouverte $T(j\omega)$ a donné lieu à la recherche des pôles et des zéros de la fraction rationnelle $T(p)$ de $\mathbb{C}[p]$. L'indéterminée p peut s'écrire :

$$p = \alpha + j\omega$$

La transformation conforme définie par $T(p)$ fait correspondre à tout point

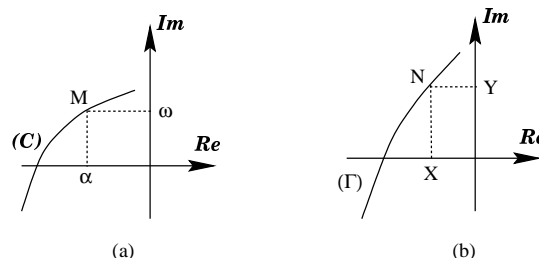


FIG. 5.2 – Transformée conforme

M du plan complexe, $M(\alpha + j\omega)$ un point N , $N(X + jY)$ dans le plan complexe, défini par :

$$T(\alpha + j\omega) = X(\alpha, \omega) + jY(\alpha, \omega)$$

Si M décrit la courbe (\mathcal{C}) dans le plan complexe, N décrit la courbe (Γ) appelée *transformée conforme* de (\mathcal{C}) dans la transformation définie par $T(p)$.

²Système linéaire ne comportant ni retard pur, ni déphasage pur.

5.3.3 Propriétés de la transformation conforme

- Elle conserve les angles avec leur sens. Les droites $\omega = \text{constante}$ et $\alpha = \text{constante}$ ont des transformées orthogonales³.
- M décrivant l'axe imaginaire dans le sens des ω croissants, N décrit la courbe représentative de la transmittance $T(j\omega)$ en boucle ouverte car ce lieu correspond à $\alpha = 0$.

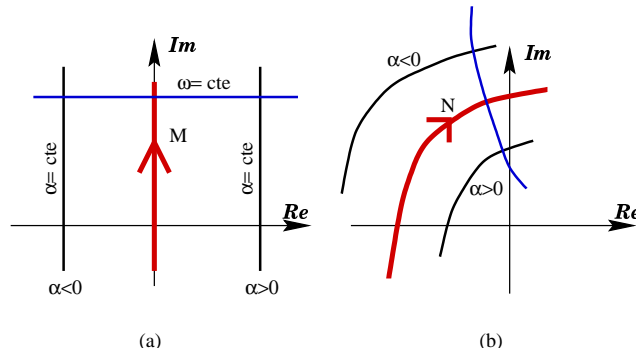
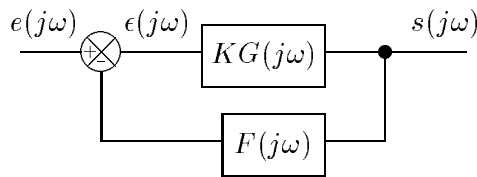


FIG. 5.3 – Propriétés de la transformée conforme

- Le sens des angles étant conservé, puisque M laisse à sa gauche les α négatifs et à sa droite les α positifs, le point N laisse à sa gauche les courbes $T_{\alpha_c}(\alpha_c, \omega)$ avec α_c négatif constant, et à sa droite celles avec les α positifs constants.
- Les transformées des courbes (\mathcal{C}) avec $\omega = \text{constante}$ sont des courbes $T_{\omega_c}(\alpha, \omega_c)$ orthogonales aux courbes $T_{\alpha_c}(\alpha_c, \omega)$ (avec $\alpha_c = \text{constante}$).

5.3.4 Critère du revers

Soit un système asservi donné par le schéma fonctionnel suivant :



Sa transmittance en boucle ouverte est

$$T(j\omega) = KG(j\omega)F(j\omega)$$

Sa transmittance en boucle fermée est :

$$H(j\omega) = \frac{KG(j\omega)}{1 + KG(j\omega)F(j\omega)} = \frac{KG(j\omega)}{1 + T(j\omega)}$$

³Avec mêmes échelles.

Soit $\alpha_c + j\omega_c$ une racine de $1 + T(p)$. $\alpha_c + j\omega_c$ est donc un pôle de la transmittance en boucle fermée. Or, $\alpha_c + j\omega_c$ vérifie également la relation :

$$T(\alpha_c + j\omega_c) = -1$$

et on peut alors connaître le signe de sa partie réelle en appliquant les propriétés du paragraphe précédent. En effet, la transformation conforme d'un pôle de $H(p)$ par $T(p)$ le place au point -1. Il sera à partie réelle négative si N parcourant $T(j\omega)$ dans le sens des ω croissants, laisse le point $A(-1)$ à sa gauche (car M parcourant l'axe $j\omega$ dans le sens des ω croissants laisse à sa gauche les nombres complexes à partie réelle négative).

En résumé... Soit à étudier la stabilité du système $H(j\omega) = \frac{KG(j\omega)}{1+T(j\omega)}$.

x est un pôle de $H(j\omega)$

↓

$$1 + T(x) = 0$$

↓

$$T(x) = -1$$

↓

La transformation conforme de x par T est le point d'affixe (-1).

↓

Si x est à partie réelle négative alors il est laissé à gauche lorsque M décrit l'axe $j\omega$ dans le sens des ω croissants.

↓

Après transformation conforme, la transformée de x ($= -1$) est également laissée à gauche par la transformée de M c'est à dire par le parcours du point N sur la courbe de $T(j\omega)$ décrite dans le sens des ω croissants.

La courbe (Γ) décrite par le point $N(T(j\omega))$, transformée de $M(j\omega)$ pour ω allant de 0 à l'infini, s'appelle le *lieu de NYQUIST*.

Des remarques précédentes, on déduit le critère du revers :

Critère du revers : Un système asservi est stable si en parcourant le lieu de NYQUIST dans le sens des ω croissants, on laisse le point $A(-1)$ à gauche.

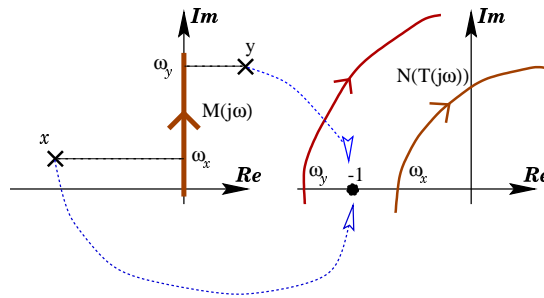


FIG. 5.4 – Si x et y sont des pôles de H , alors, leur transformée par T est le point d'affixe (-1) . Le signe de la partie réelle de x est négatif. Sa transformée (-1) est laissée à gauche par le point $N(T(j\omega))_{\omega=\omega_x}$. Le signe de la partie réelle de y est positif. Sa transformée (-1) est laissée à droite par le point $N(T(j\omega))_{\omega=\omega_y}$.

Remarque : Si le système étant stable, $T(j\omega)$ passe près du point -1 , la transformation conforme montre que les racines de $1 + T(p) = 0$ auront une partie réelle α négative avec α petit. Donc, les régimes transitoires seront faiblement amortis.

5.3.5 Critère du revers dans le plan de BODE

Le point -1 a pour module 1 et pour déphasage -180° . On en déduit l'expression du critère du revers dans le plan de BODE :

le système asservi est stable si à la pulsation pour laquelle $|T(j\omega)| = 1$ soit $|T(j\omega)|_{dB} = 0$, le déphasage de la transmittance en boucle ouverte est inférieur à -180° .⁴

Cette valeur de ω , soit ω_{co} est dite *pulsation de coupure* en boucle ouverte.

Loi de BODE Elle constitue une approximation du critère du revers souvent utilisée en électronique. On peut remarquer que pour un système à déphasage minimal, à une pente de $n \times (-20dB/dec)$ de la courbe de gain correspond un déphasage de $n \times (-90^\circ)$. Donc si la relation pente/déphasage est vraie, la condition de stabilité précédente peut s'écrire :

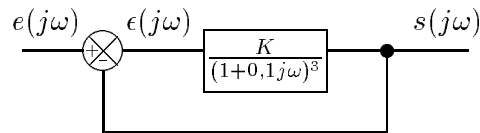
Le système sera stable si à la pulsation ω_{co} pour laquelle $|T(j\omega_{co})|_{dB} = 0$, la courbe de gain est supérieure en valeur algébrique à -40 dB/dec.

Cette interprétation peu être mise en défaut non seulement si le système n'est pas à déphasage minimal, mais aussi si les courbes de gain et de phase ne sont pas équivalentes à leurs asymptotes pour $\omega = \omega_{co}$.

⁴ou bien : "le système asservi est stable si à la pulsation pour laquelle $Arg(j\omega) = -180^\circ$, $|T(j\omega)|_{dB} < 0$ ", cependant, cette deuxième version même si elle paraît plus proche du premier principe énoncé ne permet pas de définir les marges de stabilité pour des systèmes d'ordre inférieur ou égal à 2, c'est à dire de quantifier le côté pratique de la stabilité des systèmes.

5.3.6 Application

On étudie la stabilité du système à retour unitaire suivant :



Le diagramme de BODE de la fonction de transfert **en boucle ouverte** est représentée sur la figure 5.5 pour trois valeurs de K : $K = 2$, $K = 8$ et $K = 20$. En appliquant le critère du revers dans le plan de BODE pour chacun de ces cas, on peut déterminer la stabilité du système en boucle fermée. La valeur $K = 8$ paraît être la limite de stabilité du système. Ceci peut se vérifier par le critère de ROUTH.

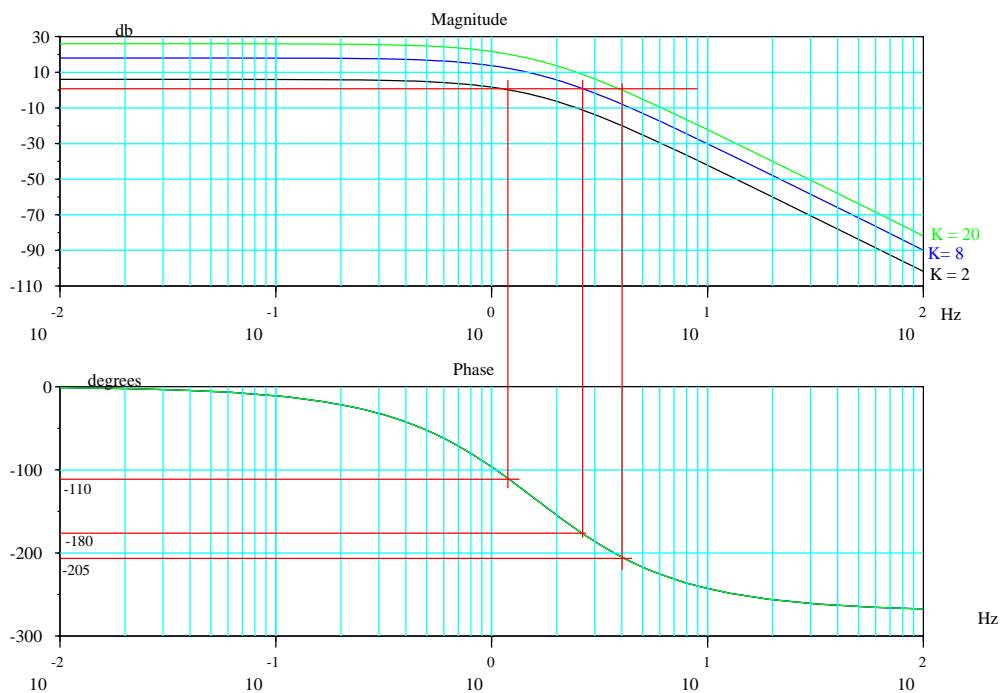
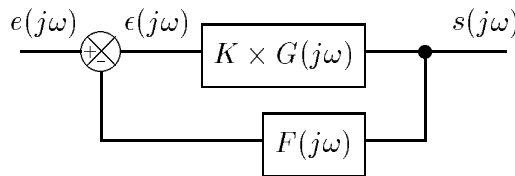


FIG. 5.5 – Les 3 courbes de gains présentent des pulsations de coupures différentes. Les courbes de phase sont identiques

5.3.7 Interprétation physique d'un système juste oscillant

Un système bouclé avec une entrée nulle peut-il osciller ?



Avec $e(j\omega)$ on obtient :

$$\begin{cases} \epsilon(j\omega) &= -F(j\omega) \times s(j\omega) \\ s(j\omega) &= K \times G(j\omega) \times \epsilon(j\omega) \end{cases}$$

$$\Rightarrow s(j\omega)(1 + KG(j\omega)F(j\omega))$$

La solution $s(j\omega)$ est non nulle si

$$\begin{aligned} 1 + KG(j\omega)F(j\omega) &= 0 \\ \Leftrightarrow KG(j\omega)F(j\omega) &= -1 \\ \Rightarrow \arg KG(j\omega)F(j\omega) &= -180^\circ \end{aligned}$$

On retrouve le point critique. Le système est oscillant si la courbe $T(j\omega) = KG(j\omega)F(j\omega)$ passe par -1 .

On conçoit qu'un système stable aura un comportement d'autant plus voisin de celui d'un système oscillant que la courbe de $T(j\omega)$ passera près du point -1 , et donc, que pour que le système soit suffisamment amorti, il conviendra que la courbe $T(j\omega)$ passe «suffisamment loin» du point -1 .

5.4 Notions pratiques de stabilité

5.4.1 Principe

La stabilité est une condition impérative pour le fonctionnement d'un système. Pour les systèmes faisant l'objet de ce cours, le respect de cette condition peut être vérifié par le critère du revers. Le système est donc stable si le lieu de BODE parcouru dans le sens des ω croissants est tel que pour un gain de 0 dB, la phase est inférieure à 180° . Cependant :

1. Il ne faut pas qu'une variation accidentelle des caractéristiques du système par rapport à celles prévues lors de l'étude entraîne une variation du lieu de transfert rendant le système instable. Il est nécessaire, pour prévenir de tels événements que le lieu de transfert passe suffisamment loin du point -1 .
2. Lorsque le lieu de transfert passe par le point -1 , le système est juste oscillant. S'il passe près du point critique, tout en restant stable au sens mathématique, la réponse à une perturbation sera faiblement amortie.

Il est nécessaire, pour obtenir un système suffisamment amorti que le lieu de transfert possède une «marge de sécurité» par rapport au point critique. Le réglage d'un système asservi sera la recherche d'un «bon» compromis entre les deux contraintes opposées :

$$\begin{cases} \text{sécurité;} \\ \text{bonne performance en régime transitoire.} \end{cases}$$

L'emploi de méthodes harmoniques ne devra pas faire oublier que les réponses du système en régime transitoire sont aussi très importantes.

5.4.2 Facteur de résonance ou coefficient de surtension

Soit $H(j\omega)$ la transmittance d'un système en boucle fermée. Le coefficient de surtension Q est défini par :

$$Q = \frac{|H|_{maxi}}{|H(O)|}$$

On considère généralement qu'un coefficient de surtension de 1,3 (soit 2,3 dB) permet de satisfaire aux conditions de sécurité et d'amortissement convenable.

5.4.3 Marge de phase

La marge de phase est la différence de phase entre la phase du point de la fonction de transfert en boucle ouverte de module 1 et la phase du point critique -180° . Dans l'exemple de la figure 5.6, la marge de phase est :

$$M_\phi = -159^\circ - 180^\circ = 21^\circ$$

Le système correspondant ne présente donc pas une marge de phase suffisamment importante pour garantir une bonne stabilité en boucle fermée. Il devra être corrigé.

La notion de marge de phase est commode car elle permet d'étudier la stabilité et la correction d'un système dans le plan de BODE. Pour la majorité des systèmes, il est pratiquement équivalent de respecter :

- soit la condition de marge de phase inférieure à 45°
- soit la condition de coefficient de surtension $\leq 2,3$ dB

(en notant bien que la marge de phase est définie en boucle ouverte lors que la surtension l'est pour la boucle fermée.)

5.4.4 Marge de gain

L'affixe du point critique a pour module 1 et pour argument -180° . Fixer une marge de gain, c'est donner une distance à respecter entre le point de la fonction de transfert en boucle ouverte pour lequel la phase vaut -180° et le point critique. Dans l'exemple de la figure 5.7, on mesure une marge de gain de 15 dB. D'une manière générale, on considère qu'un système convenable possède une marge de gain d'au moins 10 dB.

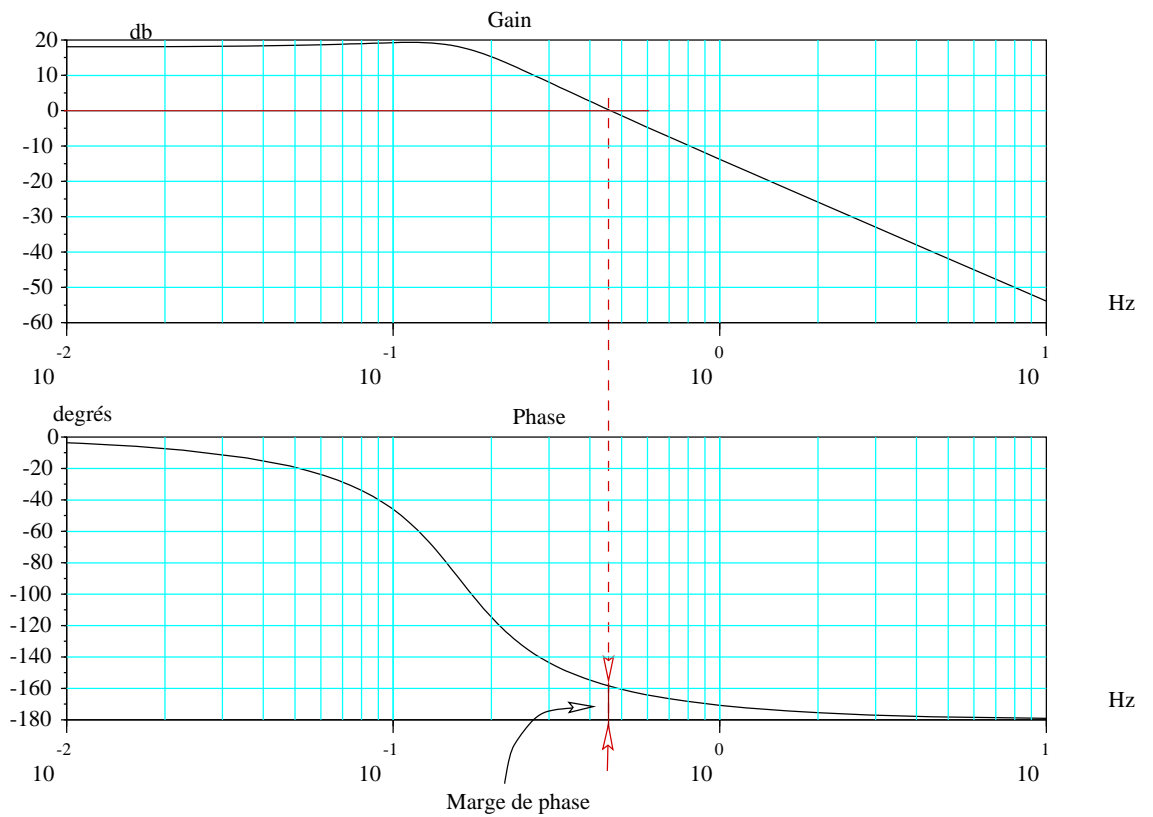
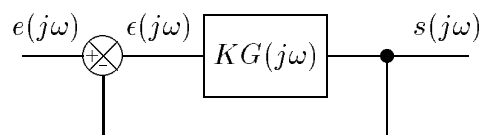


FIG. 5.6 – *Marge de phase.*

5.5 Exercices sur le chapitre 5

Exercice 12

Vérifier la stabilité des systèmes ci dessous à l'aide du critère de ROUTH

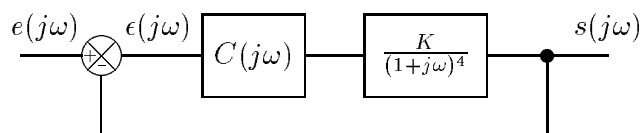


$$12a. \quad KG(j\omega) = \frac{2}{5(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 6j\omega}$$

$$12b. \quad KG(j\omega) = \frac{10}{20(j\omega)^5 + 100(j\omega)^4 + 120(j\omega)^3 + 10(j\omega)^2 + 5j\omega + 1}$$

Exercice 13

On considère le système asservi donné par le schéma suivant :



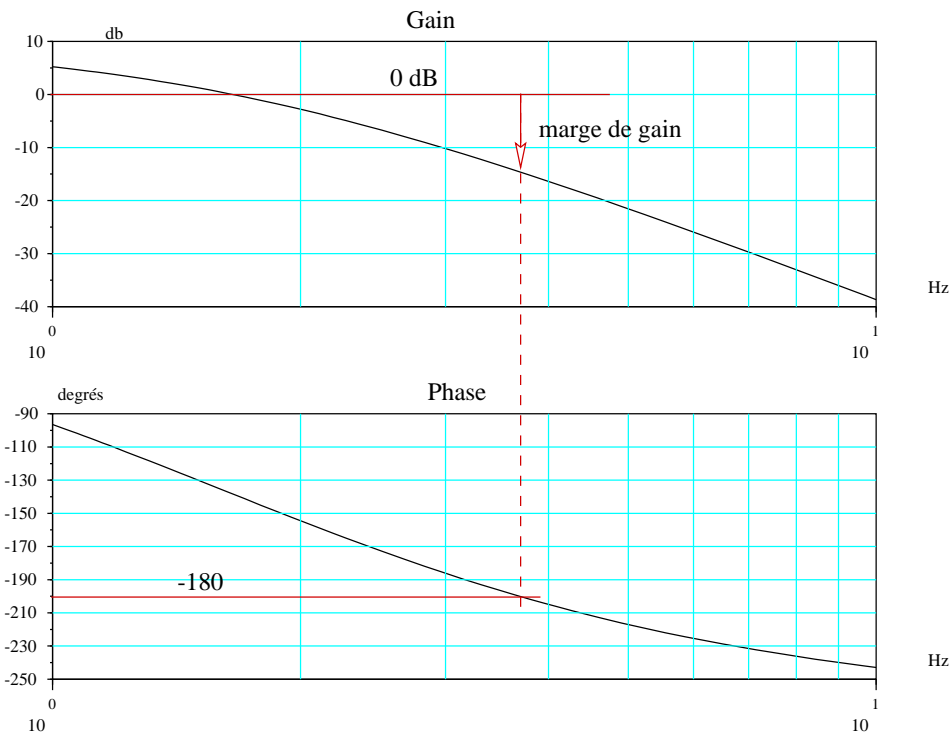
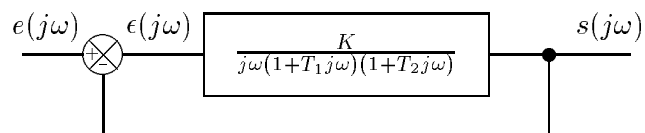


FIG. 5.7 – Représentation de la marge de gain pour $F(j\omega) = \frac{3}{(1+0,1j\omega)^3}$

- 13a.** Pour cette question, $C(j\omega) = 1$. Déterminer les conditions que doit respecter K pour que :
- le système soit stable,
 - sa marge de phase soit de 45° .
- 13b.** Le système est corrigé à l'aide d'un régulateur : $C(j\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4j\omega} + \frac{j\omega}{2}$
Reprendre les questions précédentes. Quel est l'intérêt de ce régulateur ?

Exercice 14

Un système asservi est conforme au schéma fonctionnel ci dessous :



On prendra $T_1 = 0,1$ s et $T_2 = 0,01$ s.

- 14a.** Déterminer les valeurs de K pour lesquelles :
- le système est juste oscillant,

- ii. sa marge de phase est de 45° ,
- iii. son coefficient de surtension est de 2,3 dB.

Dans ce dernier cas, déterminer la fréquence de résonance en boucle fermée (ω_R) et la bande passante à -6 dB.

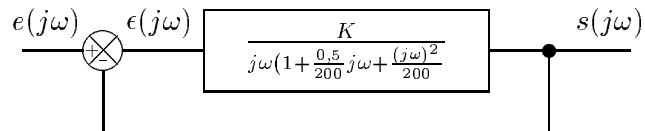
14b. Retrouver la valeur limite de K par le critère de ROUTH.

Exercice 15

Même exercice que 5.5 mais avec $T_1 = 2$ s et $T_2 = 0,5$ s.

Exercice 16

Même exercice que 5.5 mais avec le système défini ci dessous :



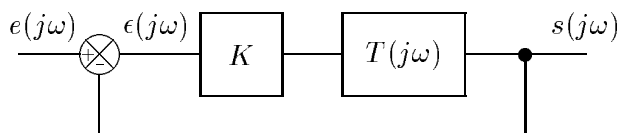
Exercice 17

Rechercher, en employant le critère du revers dans le plan de BODE, les conditions de stabilité des systèmes ci dessous lorsque K varie.

- 17a. $G_1(j\omega) = \frac{1+2j\omega}{(j\omega)^2(1+0,25j\omega)(1+0,1j\omega)}$
- 17b. $G_2(j\omega) = \frac{(1+0,2j\omega)(1+0,02j\omega)}{(j\omega)^2(1+j\omega)(1+0,005j\omega)^2}$
- 17c. $G_3(j\omega) = \frac{(1+0,2j\omega)(1+0,02j\omega)}{j\omega(1+5j\omega)(1+j\omega)(1+0,005j\omega)^2}$

Exercice 18

L'étude fréquentielle en boucle ouverte d'un asservissement de position à retour unitaire défini par le schéma fonctionnel ci-dessous, a donné le résultat de la figure 5.8. (Ce système est à déphasage minimal).



- 18a. Déterminer sa transmittance en boucle ouverte et en boucle fermée, K étant variable.
- 18b. Déterminer les valeurs de K pour lesquelles le système asservi :
- est à la limite de stabilité,
 - a une marge de phase de 45° .
- Dans ce dernier cas, quels sont les facteurs de résonance et la bande passante à -3 dB.

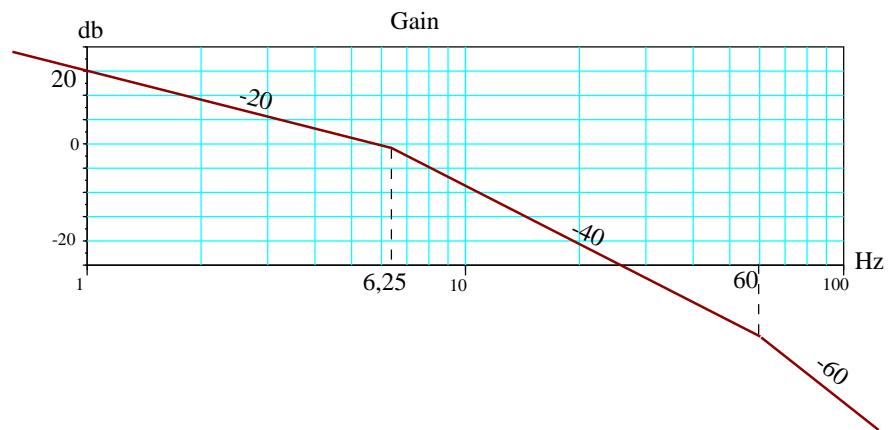


FIG. 5.8 – Courbe de gain (exercice 18).

- 18c. On interpose après le détecteur d'écart, un correcteur défini par le schéma structurel de la figure 5.9. Déterminer la nouvelle transmittance en boucle ouverte.

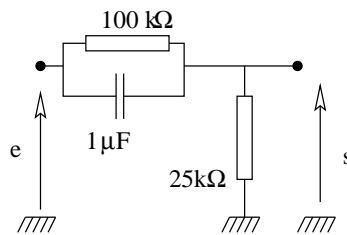


FIG. 5.9 – Correcteur (exercice 18).

- 18d. . Reprendre la question 18b avec ce nouveau système.

Chapitre 6

Correction des systèmes asservis

Dans les chapitres précédents, nous avons donné les éléments nécessaires pour analyser le comportement d'un système donné, son amortissement, sa stabilité.

Le projet d'un système asservi doit présenter des performances imposées en précision et en stabilité. Ces deux exigences sont contradictoires et ne peuvent en général pas être obtenues par un simple réglage de gain. Il faut alors adjoindre au système des organes supplémentaires appelés *correcteurs*.

Ces correcteurs peuvent technologiquement être classés en correcteurs électriques, mécaniques, hydrauliques et pneumatiques, chaque type ayant un domaine d'emploi préférentiel fonction de la technologie des autres éléments de l'asservissement.

6.1 Stabilité et précision : exemple du second ordre

Influence de l'amortissement z sur la marge de phase. La figure 6.1 représente les marges de phase pour trois valeurs de z . L'influence de z intervient deux fois ; en effet, lorsque z diminue :

- 1 la fréquence f_C pour laquelle le module vaut 0 dB est déplacée dans le sens des fréquences croissantes, donc correspond à une marge de phase inférieure ;
- 2 la courbe de phase se rapproche de son asymptote, ce qui tend également à faire diminuer la marge de phase.

Influence du gain statique K sur la marge de phase . La figure 6.2 représente les marges de phase pour différentes valeurs de gain statique. La valeur de l'amortissement a été fixée à 1. La courbe de phase est la même quelque soit le gain statique. Une augmentation du gain correspond à une translation de la courbe de gain dans le sens croissant des ordonnées. La fréquence f_C du point critique est alors translatée dans le sens des fréquences croissantes et la marge de phase diminue.

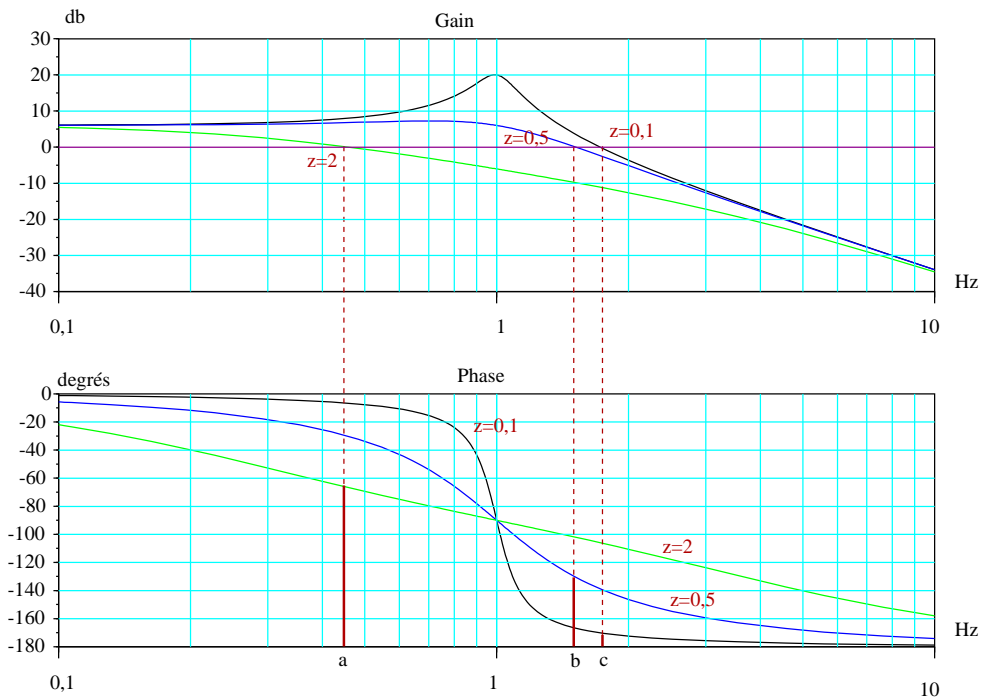


FIG. 6.1 – Évolution de la marge de phase pour trois valeurs de z . Le gain statique est le même pour les trois courbes.

Influence du gain statique K sur la précision. Le gain statique de la fonction de transfert en boucle fermée est $\frac{K}{K+1}$. Prenons le cas d'une régulation ; l'entrée de consigne est donc constante : $e(t) = E_0$ pour $t \geq 0$. La sortie sera – en régime établi – $s(t) = \frac{K}{K+1} \times E_0$. L'erreur ϵ_∞ présente en régime établi est donc :

$$\epsilon_\infty = E_0 - \frac{K}{K+1} \times E_0 = \frac{E_0}{K+1}$$

Dans l'exemple de la figure 6.3, on vérifie bien que l'erreur permanente lorsque l'entrée est un échelon unité est approximativement de 0,1. Le calcul donne : $\frac{1}{10+1} = 0,09$.

L'erreur permanente diminue lorsque le gain statique augmente selon le graphe de la figure 6.4

Conclusion. L'exemple du système du second ordre met en évidence le fait que la précision et la stabilité sont des objectifs qui devront faire l'objet d'un compromis ou un simple réglage de gain paraît insuffisant.

6.2 Notion de compensation

On sait que pour être stable, le système à régler devra avoir un gain «pas trop important», K_1 et que pour être suffisamment précis, il devra avoir un

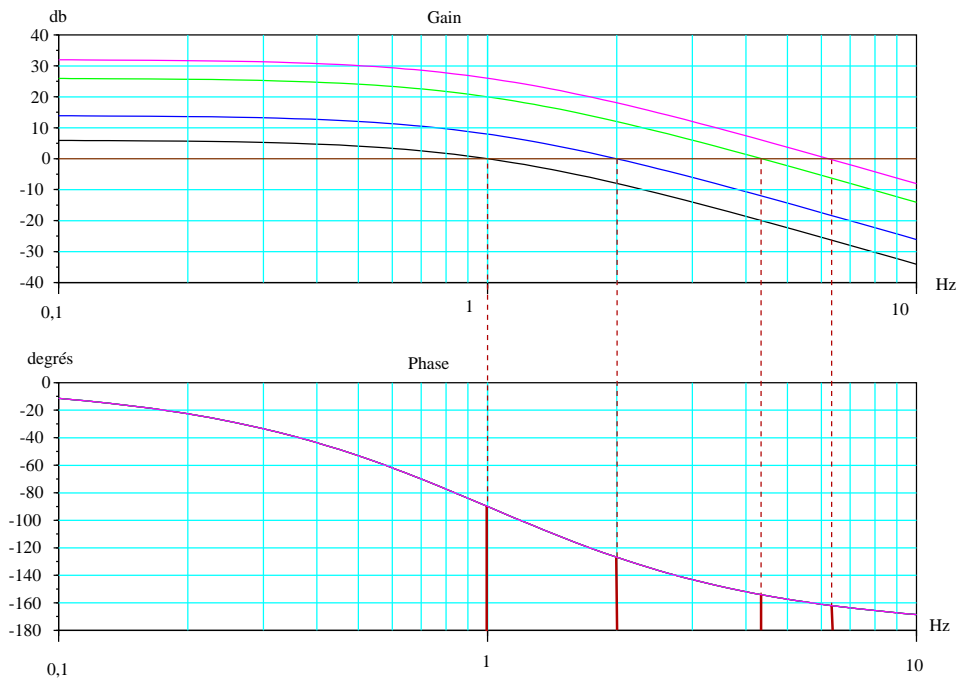
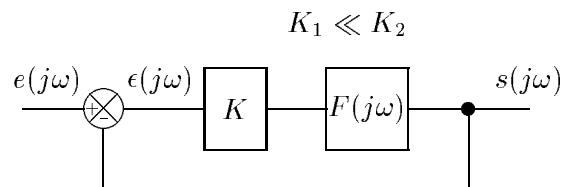


FIG. 6.2 – Influence du gain statique sur la marge de phase.

gain d'une certaine valeur K_2 . On peut avoir :



Si on possède le moyen de déformer le lieu de transfert pour qu'il coïncide avec $K_2 F(j\omega)$ aux basses fréquences (précision) et avec $K_1 F(j\omega)$ aux hautes fréquences (stabilité), on aura concilié les avantages de l'un des lieux pour la précision et de l'autre pour la stabilité.

Compenser (ou corriger) un système asservi consiste à utiliser des organes (correcteurs) permettant de modifier le lieu de transfert initial en lui donnant une forme plus avantageuse.

Cette modification peut s'obtenir par plusieurs méthodes qui se placent entre les deux extrêmes suivants obtenus à partir de $K_2 F(j\omega)$ (défini par la précision) que l'on cherche à déformer dans la zone des hautes fréquences pour s'éloigner du point critique -1.

- 1 Correction par avance de phase : dans la zone de résonance du lieu de transfert, deux points correspondant à la même fréquence conservent le même module mais le déphasage du lieu corrigé est inférieur au lieu initial.

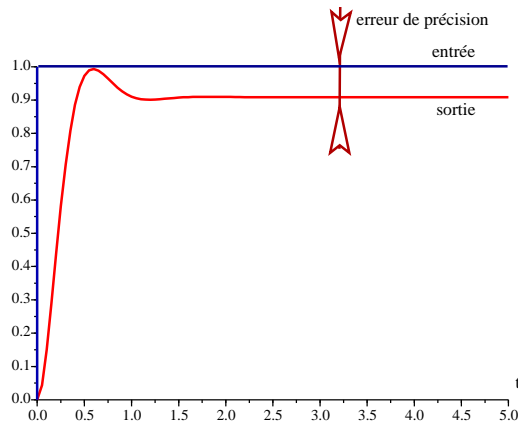


FIG. 6.3 – Réponse d'un système du second ordre à retour unitaire. Les paramètres en boucle ouverte sont $z = 2$, $\omega_0 = 2 \text{ rd/s}$ et $K = 10$.

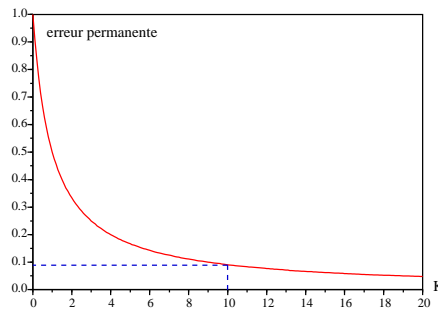


FIG. 6.4 – Évolution de l'erreur statique d'un système à retour unitaire lorsque l'entrée est un échelon unitaire.

- 2 Correction par contrôle intégral : dans la zone de résonance du lieu de transfert, deux points correspondant à la même fréquence conservent la même phase, mais le module du lieu corrigé est inférieur au module initial.

Un système corrigé par avance de phase sera plus rapide qu'un système corrigé par contrôle intégral.

Nous nous limiterons par la suite à l'étude de ces deux correcteurs, placés dans la chaîne directe. On les qualifie, de «correcteurs en cascade».

6.3 Correcteur à avance de phase

6.3.1 Principe

On modifie le le lieu de transfert dans la zone du point critique en interposant un correcteur qui donne une avance de phase. Un réseau donnant uniquement une avance de phase n'existant pas, on emploie en général des

réseaux de transmittance :

$$C(j\omega) = \frac{1 + a\tau j\omega}{1 + \tau j\omega} \text{ avec } a > 1$$

6.3.2 Transmittance dans le plan de BODE

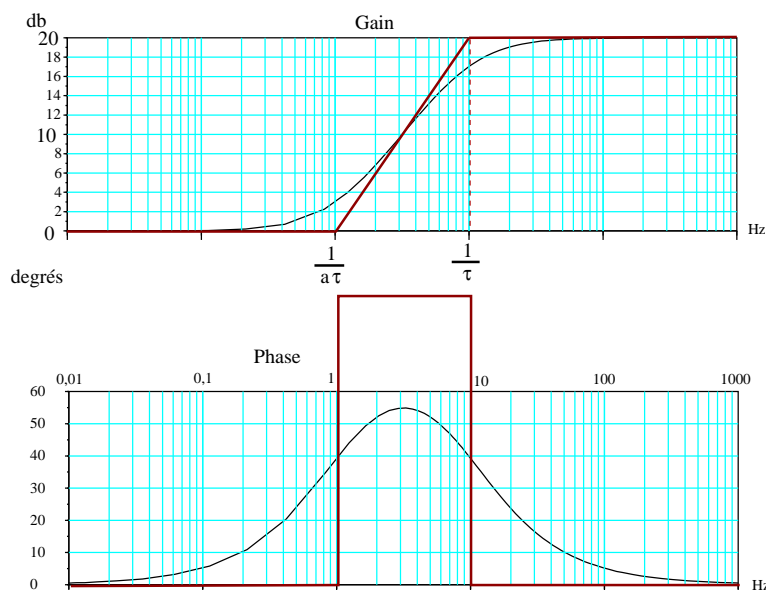


FIG. 6.5 – Correcteur à avance de phase avec $\tau = 0,1$ et $a = 10$.

La représentation dans le plan de BODE de la transmittance du correcteur à avance de phase est donné par la figure 6.5. On montre facilement que la phase maximum apportée est :

$$\phi_d = \arcsin \frac{a - 1}{a + 1}$$

Cette avance maximum se produit pour une pulsation :

$$\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$$

Il faut déterminer a et τ pour que la marge de phase du système corrigé pour que la marge de phase soit convenable aux alentours du point critique du système corrigé.

6.3.3 Mise en oeuvre sur un exemple

On considère le système asservi à retour unitaire du second ordre dont la transmittance en boucle ouverte est :

$$T(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}$$

avec :

$$\begin{cases} K = 10 \\ z = 0,5 \\ \omega_0 = 2\pi \text{ rd/s} \end{cases}$$

La représentation dans le plan de BODE de sa transmittance est donnée par la courbe inférieure de la figure 6.6. La marge de phase du système en boucle ouverte étant $M_\phi \simeq 20^\circ$, on en conclut que le système en boucle fermée ne sera pas suffisamment stable.

Après quelques essais¹, il s'avère qu'un correcteur à avance de phase où $a = 10$ et $\tau = \frac{1}{10\omega_0}$ donne une marge de phase $M'_\phi \simeq 50^\circ$, ce qui est plus «convenable». La transmittance du système corrigé est donné par la courbe inférieure de la figure 6.6.

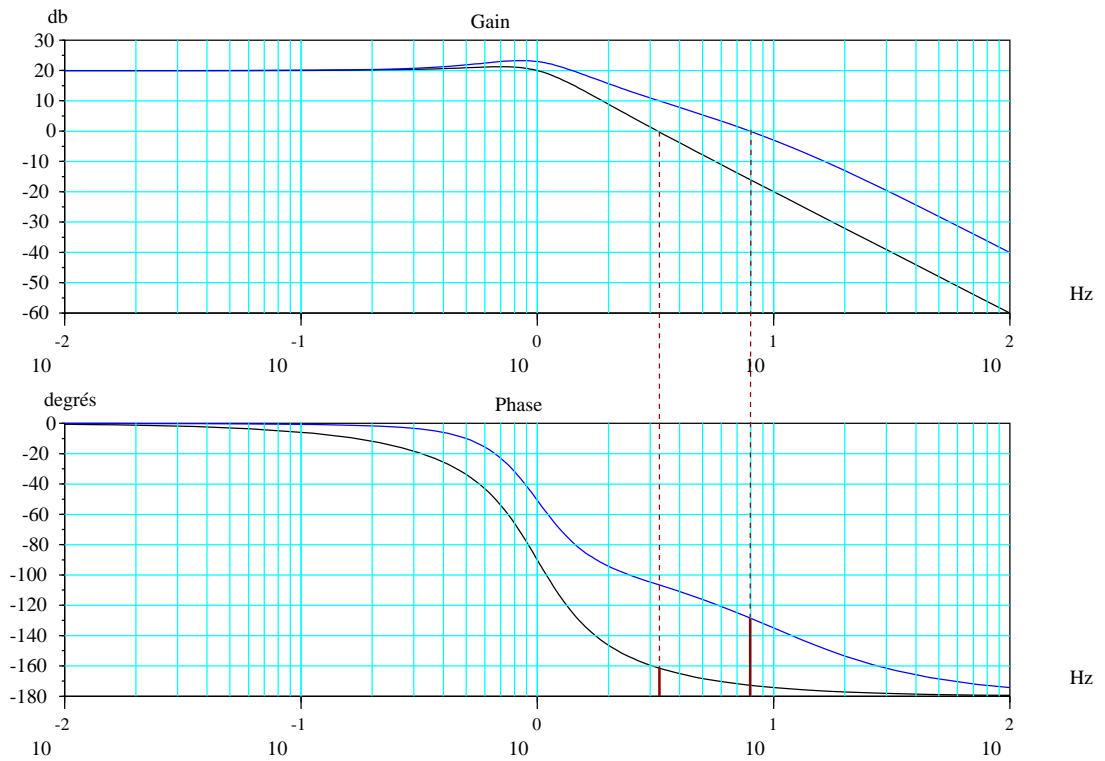


FIG. 6.6 – Système corrigé avec un correcteur à avance de phase. La marge de phase progresse de 20° à 50° , le gain statique n'est pas modifié.

Effet parasite. On remarque que la présence du correcteur apporte un accroissement du module. La fréquence f_m pour laquelle le système a un gain de 0 dB est donc décalée vers les fréquences élevées, donc dans le sens où la marge de phase diminue ... Il convient donc de corriger le système

¹Réalisés avec le programme Scilab de l'INRIA

en centrant le correcteur sur une fréquence supérieure à la fréquence pour laquelle la marge de phase est définie dans le système non corrigé.

Correction proportionnelle et dérivée. Pour des pulsations $\omega \ll \frac{1}{\tau}$,

$$1 + \tau j\omega \simeq 1 \Rightarrow C(j\omega) \simeq \frac{1 + a\tau j\omega}{1} \simeq (1 + a\tau j\omega)$$

Si ϵ est l'entrée du correcteur et ϵ' sa sortie, on a alors :

$$\epsilon'(j\omega) = C(j\omega) \times \epsilon(j\omega)$$

et pour les pulsations $\omega \ll \frac{1}{\tau}$:

$$\begin{aligned} \epsilon'(j\omega) &\simeq (1 + a\tau j\omega) \epsilon(j\omega) \\ &\simeq \epsilon(j\omega) + a\tau j\omega \epsilon(j\omega) \\ \Rightarrow \epsilon'(t) &\simeq \epsilon(t) + a\tau \frac{d\epsilon(t)}{dt} \end{aligned}$$

C'est pourquoi on l'appelle également *correcteur à action proportionnelle et dérivée*.

6.3.4 Limitations

Limitation des possibilités de compensation. Ce correcteur est peu efficace pour compenser des termes du type $\frac{1}{1 + \frac{2z}{\omega_0} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}$ avec z petit. La chute brusque dans la courbe de phase aux environs de ω_0 est de 180° et rend la compensation difficile par ce procédé.

On augmente la rapidité du système. On peut avoir des constantes de temps qui ne sont plus négligeables. Ceci s'explique également par le fait que la bande passante du système s'élargit.

Le bruit est accentué par l'effet de dérivation. L'augmentation de la bande passante est encore en cause. En pratique, on ne dépasse pas $a = 10$ à 15 .

6.3.5 Réalisation des correcteurs à avance de phase

Parmi les réalisations possibles, on note en particulier le réseau actif de la figure 6.7a pour lequel on vérifiera que :

$$C_a(j\omega) = \frac{s(j\omega)}{e(j\omega)} = -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{1 + R_1 C_1 j\omega}{1 + R_2 C_2 j\omega}$$

Il suffit de choisir $R_1 C_1 > R_2 C_2$. Il sera également nécessaire de mettre en cascade un «gain» de -1 avec cette réalisation.

Concernant le réseau de la figure 6.7b, on vérifiera que :

$$C_b(j\omega) = \frac{s(j\omega)}{e(j\omega)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times \frac{1 + R_1 C_1 j\omega}{1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_1 j\omega}$$

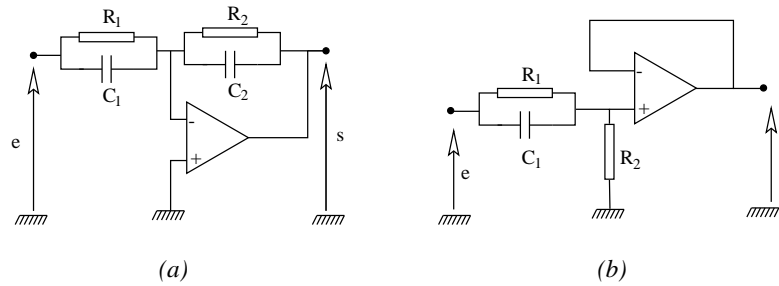


FIG. 6.7 – Réseaux électriques actif (a) et passif avec adaptation d'impédance (b), réalisant la fonction d'avance de phase.

6.4 Correcteur à action intégrale

6.4.1 Principe

On recherche un correcteur dont l'effet essentiel sera de diminuer le module dans la zone de résonance, donc aux hautes fréquences, sans le modifier aux basses fréquences (pour garder la précision).

Un réseau donnant uniquement une variation de gain sur une bande de fréquence étant irréalisable, on emploie un réseau de transmittance :

$$C(j\omega) = \frac{1 + \tau j\omega}{1 + b\tau j\omega} \text{ avec } b > 1$$

Ce réseau aura :

un effet utile : la diminution de gain aux fréquences élevées,

un effet parasite : un déphasage pour ces mêmes fréquences.

6.4.2 Transmittance dans le plan de BODE

Les courbes de gain et de phase ont des ordonnées de signe contraire de celles d'un correcteur à avance de phase (en prenant $a = b$). Le déphasage maximal se produit pour $\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{b}}$ et vaut :

$$\Phi_m = -\arcsin \frac{b-1}{b+1}$$

Action proportionnelle et intégrale. Pour des pulsations $\omega \gg \frac{1}{\tau\sqrt{b}}$, d'où :

$$1 + b\tau j\omega \simeq b\tau j\omega \Rightarrow C(j\omega) \simeq \frac{1 + \tau j\omega}{b\tau j\omega} \simeq \frac{1}{b} \left(1 + \frac{1}{\tau j\omega} \right)$$

Si ϵ est l'entrée du correcteur et ϵ' sa sortie, on a alors :

$$\epsilon'(j\omega) = C(j\omega) \times \epsilon(j\omega)$$

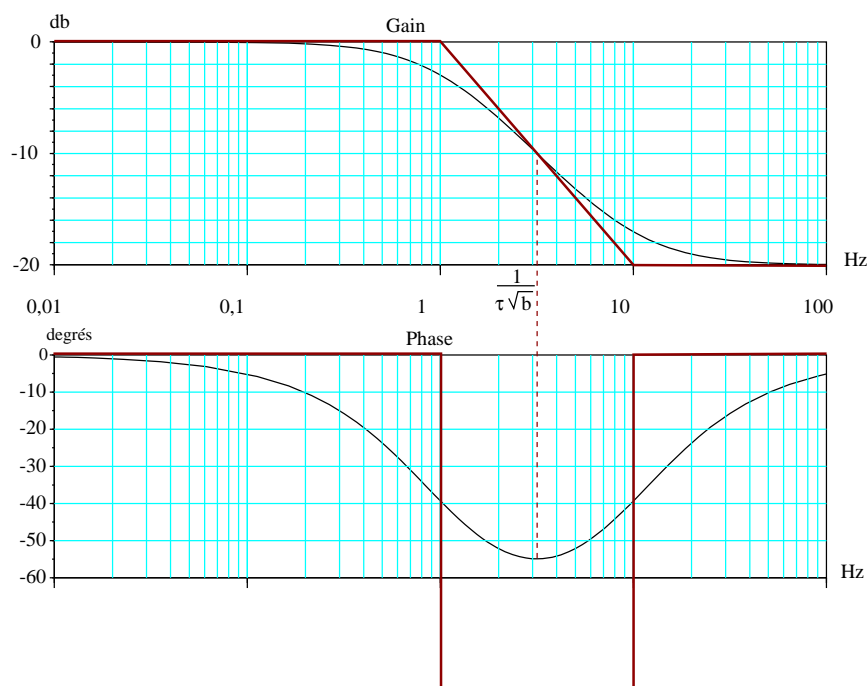


FIG. 6.8 – Lieu de transfert du correcteur à action intégrale.

et pour les pulsations $\omega \gg \frac{1}{\tau\sqrt{b}}$:

$$\begin{aligned}
 \epsilon'(j\omega) &\simeq \frac{1}{b} \left(1 + \frac{1}{\tau j\omega} \right) \epsilon(j\omega) \\
 &\simeq \frac{1}{b} \left(\epsilon(j\omega) + \frac{1}{\tau} \frac{\epsilon(j\omega)}{j\omega} \right) \\
 \Rightarrow \epsilon'(t) &\simeq \frac{1}{b} \left(\epsilon(t) + \frac{1}{\tau} \int \epsilon(t) dt \right)
 \end{aligned}$$

... d'où le nom de ce correcteur. On l'appelle également *correcteur à action proportionnelle et intégrale* (PI).

6.4.3 Mise en oeuvre sur un exemple

Le système à corriger est le même que celui du paragraphe 6.3.3 (système du second ordre avec $z = 0,5$; $K = 10$; $\omega_0 = 2\pi$ rd/s). La transmittance du système en boucle ouverte non corrigé correspond cette fois aux courbes supérieures de la figure 6.9. Le correcteur retenu est défini par les paramètres : $b = 5$ et $\tau = \frac{10}{\omega_0}$.

La marge de phase passe cette fois de 20° à 45° . Le système complet est représenté par le schéma fonctionnel suivant :

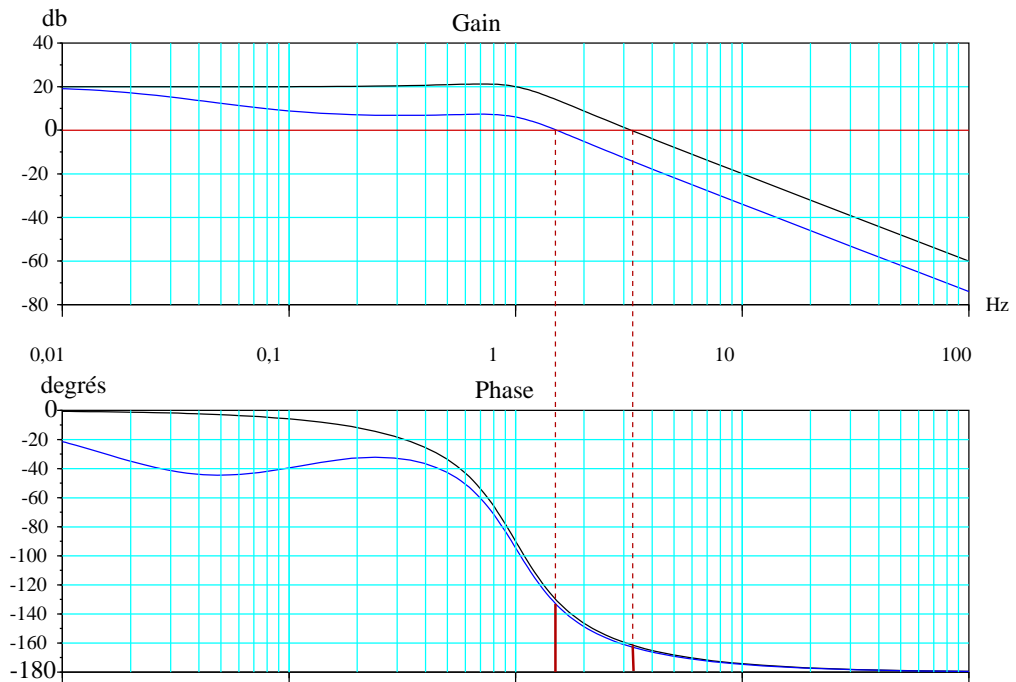
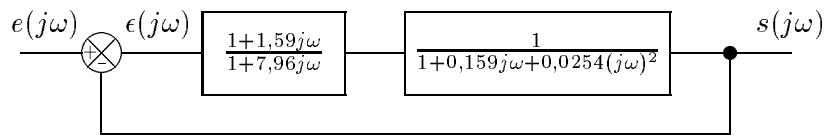


FIG. 6.9 – Correction d'un système du second ordre par action intégrale.



6.4.4 Réalisation

Le système de la figure 6.10 réalise un correcteur à action intégrale. On

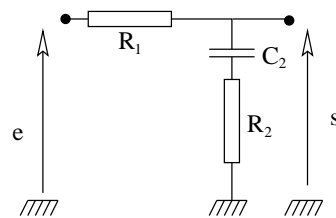


FIG. 6.10 – Schéma structurel d'un correcteur à action intégrale.

vérifie que :

$$C(j\omega) = \frac{s(j\omega)}{\epsilon(j\omega)} = \frac{1 + R_2 C_2 j\omega}{1 + (R_1 + R_2) C_2 j\omega}$$

6.4.5 Limitations

- Un réseau correcteur doit généralement avoir des constantes de temps supérieures à celles du système à corriger. Ceci peut être gênant :
 - pour la rapidité des régimes transitoires ;
 - pour la réalisation technologique des constantes de temps élevées.

Par contre, constituant un filtre passe-bas, il atténue l'influence des bruits de fond sur le signal d'écart (ϵ)

6.5 Correcteurs mixtes

6.5.1 Principe

Le but de tels correcteurs est de cumuler les avantages des deux types de correcteurs précédents. Ils sont très utilisés. Le correcteur intégral agit aux basses fréquences, et le correcteur dérivé aux hautes fréquences. Le dia-

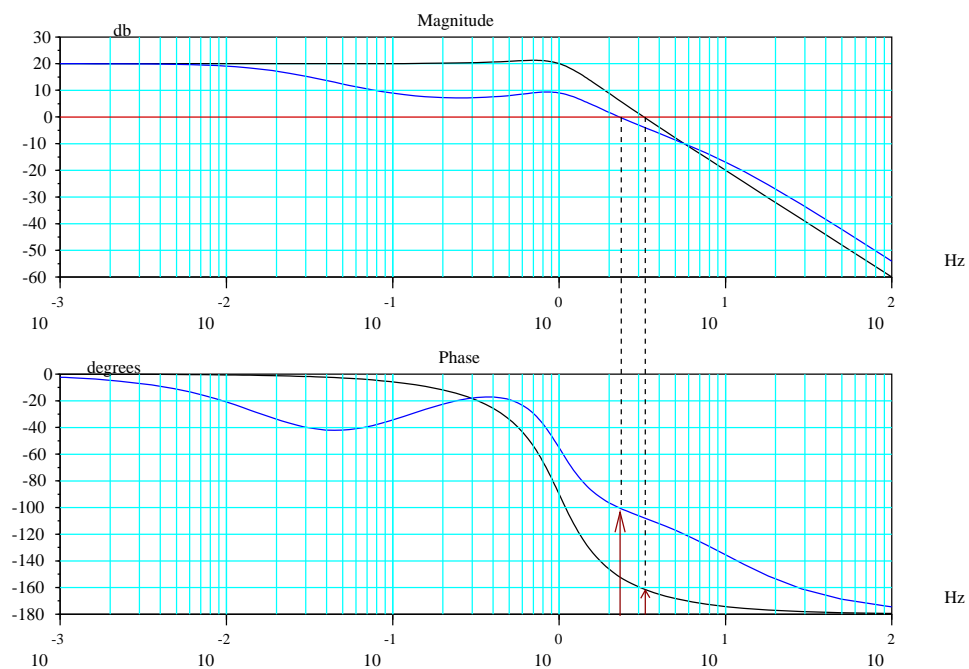


FIG. 6.11 – Diagramme de Bode du correcteur mixte.

gramme de BODE de la figure 6.11 représente l'action des deux correcteurs vus dans les paragraphes précédents, pour le même système et avec les mêmes applications numériques.

6.5.2 Réalisation

La transmittance à obtenir est de la forme :

$$C(j\omega) = \frac{1 + \tau_2 j\omega}{1 + \tau_1 j\omega} \times \frac{1 + \tau_3 j\omega}{1 + \tau_4 j\omega} \text{ avec } \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4$$

On peut réaliser un tel correcteur à partir de circuits passifs. Une première technique consiste à mettre en série les correcteurs précédents (à condition, bien entendu d'y prévoir une adaptation d'impédance). On peut également, comme indiqué sur la figure 6.12 réaliser un correcteur réalisant directement la fonction désirée. Pour ce correcteur, on vérifiera, à titre d'exercice

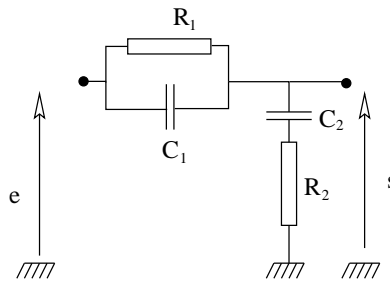


FIG. 6.12 – Correcteur mixte, à partir de composants passifs.

que la transmittance est

$$C(j\omega) = \frac{(1 + R_1 C_1 j\omega)(1 + R_2 C_2 j\omega)}{(1 + R_1 C_1 j\omega)(1 + R_2 C_2 j\omega) + R_1 C_2 j\omega}$$

et que les racines du dénominateur sont extérieures à celles du numérateur.

6.5.3 Action proportionnelle intégrale et dérivée (PID)

Pour des pulsations comprises entre $\frac{1}{\tau_1}$ et $\frac{1}{\tau_4}$, on a approximativement :

$$\frac{1}{1 + \tau_1 j\omega} \simeq \frac{1}{\tau_1} \text{ et } \frac{1}{1 + \tau_4 j\omega} \simeq 1$$

La transmittance du correcteur devient :

$$C(j\omega) = \frac{(1 + \tau_2 j\omega)(1 + \tau_3 j\omega)}{\tau_1 j\omega} = \frac{1}{\tau_1 j\omega} + \frac{\tau_2 + \tau_3}{\tau_1} + \frac{\tau_2 \tau_3}{\tau_1} j\omega$$

d'où :

$$s(t) = \frac{\tau_2 + \tau_3}{\tau_1} e(t) + \frac{1}{\tau_1} \int e(t) dt + \frac{\tau_2 \tau_3}{\tau_1} \frac{de}{dt}$$

Cette dernière expression justifie le nom donné à ce correcteur : correcteur à action proportionnelle, intégrale et dérivée (P.I.D.).

Le choix des différents paramètres se fera en fonction de ce qui a été vu pour les correcteurs précédents.

6.6 Exercices sur le chapitre 6

Exercice 19

Déterminer le type de correcteur réalisé par le schéma structurel de la figure 6.13.

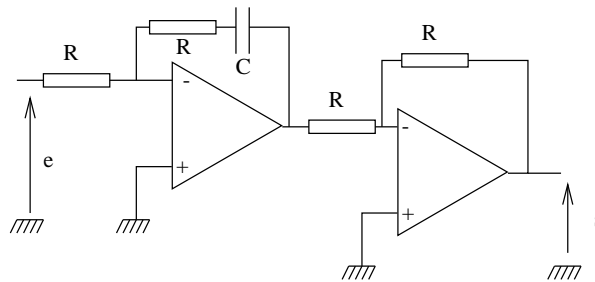


FIG. 6.13 -

Exercice 20

Tracer le diagramme de BODE du correcteur mixte du cours. (mêmes applications numériques). Faire apparaître clairement les asymptotes et les valeurs caractéristiques.

Exercice 21

La transmittance en boucle ouverte d'un système à retour unitaire est :

$$T(s) = \frac{K}{s(1+2s)(1+0,5s)} \text{ avec } s = j\omega$$

On le corrige avec un correcteur à avance de phase :

$$C(s) = \frac{1+a\tau s}{1+\tau s} \text{ avec } a = 10$$

La marge de phase devant être au moins égale à 45° , déterminer τ pour que K soit le plus élevé possible. Donner la valeur de K correspondante. Quel est alors le facteur de résonance du système bouclé ?

Exercice 22

Partie IV du concours «Centrale 1997»

Table des matières

1	Structure d'un système de commande	1
1.1	Système de commande	1
1.1.1	Généralités	1
1.1.2	Exemples	2
1.2	Finalité d'un système de commande	3
1.3	Commande en boucle ouverte	4
1.4	Commande en boucle fermée	4
1.5	Commande avec anticipation	5
2	Définition et propriétés générales des systèmes linéaires	7
2.1	Définition	7
2.2	Réponse d'un système linéaire	9
2.2.1	Méthode générale	9
2.3	Régime harmonique	10
2.4	Exemple : système du second ordre	12
2.4.1	Transmittance isochrone	14
2.4.2	Première application : moteur à courant continu	16
2.4.3	Deuxième application : système mécanique	18
3	Fonction de transfert	21
3.1	Généralités	21
3.2	Diagrammes de Bode des fonctions élémentaires	22
3.2.1	Formes $H_1(j\omega)$ et $H_3(j\omega)$	22
3.2.2	Formes $H_2(j\omega)$ et $H_4(j\omega)$	23
3.3	Applications	24
4	Systèmes asservis linéaires	28
4.1	Définition d'un système asservi	28
4.1.1	Définition	28
4.1.2	Éléments constitutifs	28
4.2	Asservissement et régulation	29
4.3	Classification des systèmes asservis	30
4.4	Fonctions de transfert d'un système bouclé	30
4.4.1	Système à retour unitaire	30
4.4.2	Système à retour non unitaire	32

5	Stabilité des systèmes asservis	36
5.1	Condition de stabilité	36
5.2	Critère de ROUTH	38
5.2.1	Énoncé du critère	38
5.2.2	Exemple	39
5.2.3	Inconvénients du critère de ROUTH	40
5.3	Critère du revers	41
5.3.1	Introduction	41
5.3.2	Transformation conforme	41
5.3.3	Propriétés de la transformation conforme	42
5.3.4	Critère du revers	42
5.3.5	Critère du revers dans le plan de BODE	44
5.3.6	Application	45
5.3.7	Interprétation physique d'un système juste oscillant	45
5.4	Notions pratiques de stabilité	46
5.4.1	Principe	46
5.4.2	Facteur de résonance ou coefficient de surtension	47
5.4.3	Marge de phase	47
5.4.4	Marge de gain	47
5.5	Exercices sur le chapitre 5	48
6	Correction des systèmes asservis	52
6.1	Stabilité et précision : exemple du second ordre	52
6.2	Notion de compensation	53
6.3	Correcteur à avance de phase	55
6.3.1	Principe	55
6.3.2	Transmittance dans le plan de BODE	56
6.3.3	Mise en oeuvre sur un exemple	56
6.3.4	Limitations	58
6.3.5	Réalisation des correcteurs à avance de phase	58
6.4	Correcteur à action intégrale	59
6.4.1	Principe	59
6.4.2	Transmittance dans le plan de BODE	59
6.4.3	Mise en oeuvre sur un exemple	60
6.4.4	Réalisation	61
6.4.5	Limitations	62
6.5	Correcteurs mixtes	62
6.5.1	Principe	62
6.5.2	Réalisation	63
6.5.3	Action proportionnelle intégrale et dérivée (PID)	63
6.6	Exercices sur le chapitre 6	64